Colección “Matemática Educativa y Tecnología”

APLICACIONES SOBRE LA MODELACIÓN, LA VISUALIZACIÓN Y USO DE REPRESENTACIONES EN LA ERA NUMÉRICA

Editores:

Dávila Araiza , María Teresa

Romero Félix, César Fabián

Hitt, Fernando

Colección: Matemática Educativa y Tecnología

Editores de la colección:

Fernando Hitt Espinosa

José Carlos Cortés Zavala

Comité Editorial

Primera edición: 20 de noviembre de 2023

Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica

Dávila Araiza, M.T., Romero Félix C.F y Hitt, F. (Eds.)

México: Editorial AMIUTEM

(Colección Matemática Educativa y Tecnología)

ISBN: 978-607-98603-3-2

Prólogo

Irene Vallejo, la joven promesa de la literatura Española, en su libro "El Infinito en un Junco" inicia su obra diciendo:

"Misteriosos grupos de hombres a caballo recorren los caminos de Grecia. Los campesinos los observan con desconfianza desde sus tierras o desde las puertas de sus cabañas. La experiencia les ha enseñado que solo viaja la gente peligrosa: soldados, mercenarios y traficantes de esclavos. Arrugan la frente hasta que los ven hundirse otra vez en el horizonte. No les gustan los forasteros armados.

Los jinetes cabalgan sin fijarse en los aldeanos. Para cumplir su tarea deben aventurarse por los violentos territorios de un mundo en guerra casi permanente"

Más adelante nos informa, que esa tarea que deben cumplir, y que fue un encargo del Rey de Egipto (Ptolomeo III), es buscar Libros, todo tipo de libros y que serán almacenados en la gran Biblioteca de Alejandría.

Irene menciona "La invención de los libros ha sido tal vez el mayor triunfo en nuestra terca lucha contra la destrucción".

Quise retomar la visión de Irene Vallejo como el inicio del prólogo, para reafirmar que cada libro que se escribe es importante para la humanidad. Así que mi querido lector, todos los autores de este material te agradecemos por haber abierto estas paginas y esperamos que encentres en este libro beneficios.

El *libro "Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica"* es la parte práctica del libro anterior llamado *"Modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica"*, por lo que es conveniente retomar lo escrito por Esnel Pérez, autor del prólogo del libro *"Modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica"*. Pérez menciona lo siguiente:

"El título mismo, *Modelación, Visualización y Representaciones en la Era Numérica*, me llevó a preguntarme ¿cuál es la significación que a partir de la lectura del texto habría de encontrar para tal expresión?

El título me permitió suponer que el contenido está articulado sobre tres grandes ejes de discusión, importantes por demás en Educación Matemática: Modelación, Visualización y Representaciones; que, si bien son distinguibles uno del otro, no se excluyen mutuamente; además de un cuarto eje, el uso de tecnología (designado implícitamente por la expresión "En la Era Numérica"), que se entrecruza con los tres primeros."

En este nuevo libro encontrarás algunas aplicaciones de las temáticas tratadas en el volumen anterior. Se compone de quince capítulos y cada uno de ellos se desarrolla proponiendo una actividad de aprendizaje.

En el capítulo uno, Del Castillo, Ibarra y Armenta desarrollan una secuencia didáctica o actividad para el aula partiendo de una situación cotidiana la Señalización de protección civil. Mencionan

“La estructura de la secuencia didáctica incluye actividades de apertura, desarrollo y cierre, acorde al planteamiento de Díaz-Barriga (2013), y es consistente con los planes y programas vigentes del bachillerato en México (SEP, 2017). Para el desarrollo de la secuencia se han incluido momentos de trabajo individual, en equipos y grupal. La reflexión individual, las interacciones con el grupo y con el profesor son importantes para promover los momentos de argumentación y la negociación de los significados construidos.

Boissinotte, en el capítulo dos propone una actividad para encontrar el mejor costo para instalar un cable, menciona “Nuestro objetivo es lograr que los estudiantes (futuros profesores de secundaria) reconozcan el potencial de Modelado 3D producido en software de geometría dinámica para resolver ciertos Problemas que involucran visualización espacial”. Recomienda, como metodología de trabajo, ACODESA[1] y propone su actividad a través de seis bloques.

Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones es el capítulo tres, los autores, Soto, Urrea Bernal y Romero hacen uso del GeoGebra para tratar las operaciones entre vectores, proponen tres secuencias didácticas donde cada una de ellas se compone de actividades para el aula.

En capítulo cuatro, escrito por Martínez y Olvera, proponen una actividad relacionada con las horas de luz solar, con esta actividad mencionan que pretenden “Que los estudiantes generen un modelo matemático de un contexto real sobre la duración de luz solar con datos que se pueden recuperar en una base que se actualizan en tiempo real. El contexto propuesto es propicio para promover el estudio de fenómenos reales que involucra periodicidad, por lo que la actividad promueve el estudio de la función seno y/o coseno a través de diferentes representaciones. La actividad se compone de cuatro momentos y cada momento es tratado a través de preguntas.

Modelizar el movimiento uniforme apoyados con un sensor de movimiento para obtener un acercamiento a la función lineal y que los estudiantes comprendan que: la gráfica distancia/tiempo que da el sensor es una representación del movimiento. Es la propuesta de Hernández, Santillán y Pérez y para ello proponen cuatro actividades que son presentadas en el capítulo cinco.

Dando continuidad al capítulo anterior en el capítulo seis los mismos autores proponen otra actividad llamada “Graficas dinámicas ligadas”, ahí proponen tres actividades que tienen como objetivo descubrir relaciones entre la gráfica de d/t y la de v/t, manipulando la gráfica.

En el capítulo siete Grijalva y Dávila proponen dos actividades didácticas que pretenden apoyar el estudio de la integral mediante el desarrollo de procesos de visualización. Las actividades diseñadas tienen como propósito promover, como punto de partida, el significado de integral como función de área, no el de integral definida como valor fijo correspondiente al área de una región estática.

Zaldívar Rojas y Vega Herrera son los encargados de la escritura del capítulo ocho, en el cual se desarrollan diez actividades para promover el uso de gráficas en la solución de sistemas de ecuaciones lineales con las cuales intentan promover la visualización matemática.

[1] ACODESA: Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Autoreflexión

Romero continua, en el capítulo nueve, con actividades para promover la visualización para encontrar raíces de funciones a través del método de Bisección y del Newton-Raphson. La propuesta incluye dos actividades, organizadas en tres etapas cada una: problema inicial, discusión grupal y ejercicios.

El capítulo diez, escrito por Ibarra y Montiel presenta la situación de estimar la temperatura. Esta actividad se desarrolla en tres etapas y tiene como objetivo que los y las profesoras participantes realicen estimaciones acerca de las temperaturas entre dos ciudades a fin de promover el análisis e interpretación geométrica del Teorema de Tales.

Las mismas autoras proponen, en el capítulo once, una actividad sobre Antenas telefónicas como un medio para conceptualizar la mediatriz.

Que los estudiantes aprendan a construir estructuras cognitivas y que liguen los procesos algebraicos en papel y lápiz, junto con los visuales con la ayuda de la geometría dinámica y el Cas de GeoGebra, es el objetivo de la propuesta que desarrolla Hitt en el capítulo doce. Es una actividad que se implementa en el aula utilizando la metodología ACODESA.

Guarín, Parada Rico y Fiallo son los autores de Capítulo trece que lleva por nombre “Nociones de aproximación y Tendencia”. Para los autores una mejor comprensión del concepto de límite de una función en un punto es el que los estudiantes tengan idea de lo que es una aproximación y una tendencia. El Capítulo se desarrolla a través de cinco actividades en las cuales se hace uso de un applet realizado en GeoGebra.

En los Capítulos catorce y quince se trabaja la generalización algebraica, en el aprendizaje formal de álgebra. Hitt y Saboya presentan una actividad denominada “El jardín de calabazas” y Hitt y Quiroz proponen la actividad “Rectángulos y círculos”. En ambas actividades se emplea la metodología ACODESA, por lo que se desarrolla la actividad en cinco etapas. En cada una de las actividades se utiliza un applet de GeoGebra.

Así que, estimado lector, esperamos que las actividades presentadas en este volumen te sean de utilidad, es importante aclarar que la editorial AMIUTEM[2] no persigue fines de lucro, por lo cual los libros editados bajo este sello son de libre circulación y completamente Gratis.

Como parte final de este prologo, recordarte que AMIUTEM es una Asociación formada por profesores de matemáticas de diferentes niveles educativos y que uno de los objetivos sociales que persigue es el de promover el uso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas, por lo que ponemos este material en tus manos para que nos ayudes con esta labor.

Morelia, México

José Carlos Cortés Zavala

[2] Asociación Mexicana de Investigadores en el Uso de Tecnología para la Enseñanza de las Matemáticas.

Contenido

Capítulo 1: Señalización para Protección Civil

Secuencia didáctica

Ana Guadalupe del Castillo B., Silvia E. Ibarra O., Maricela Armenta C. [1]

Problemática y propósitos de aprendizaje

En el contexto de la señalización en materia de Protección Civil (SEGOB, 2011), tema que se considera de relevancia social, se plantean situaciones problemáticas que darán lugar a modelos cuadráticos, y que brindarán a los alumnos oportunidades para la comprensión y análisis de las mismas, a la vez que podrán conocer conceptos, procedimientos, construir argumentaciones, manejar diferentes lenguajes, y discutir proposiciones, relacionados con el estudio de la ecuación cuadrática.

Así, se abordarán situaciones modelables con ecuaciones cuadráticas de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0;\ a,\ b,\ c\ \in\ R;\ a \neq 0,$$

articulando a lo largo de la secuencia, representaciones gráficas, tabulares, algebraicas y en lenguaje natural.

Conceptos matemáticos involucrados

Generales: Función, ecuación, incógnita, solución de una ecuación, áreas, perímetros, representaciones gráficas, numéricas y algebraicas.

Específicos: Ecuación cuadrática, función cuadrática, gráficas de funciones.

Nivel de estudios

Primer semestre de bachillerato (15 a 16 años).

Total de actividades y duración aproximada

Actividades de apertura, desarrollo y cierre, estructuradas en seis, cuatro y cuatro bloques, respectivamente, para realizarse en un total de cinco a seis sesiones de cincuenta minutos cada una.

Materiales necesarios

- Hojas de trabajo para cada estudiante.
- Applets o Archivos de GeoGebra en línea.
- Una computadora con GeoGebra para cada equipo de estudiantes. Los applets se diseñaron en GeoGebra clásico, versión 6.
- Proyector (para utilizar en discusiones grupales).
- Hojas de papel, cartoncillo o cartulina, de diferentes colores, para construir señales de protección civil en diferentes tamaños.
- Lápices o plumones de color, regla graduada y compás.

---

[1] Universidad de Sonora, México.

- Cinta métrica

Método o recomendaciones de enseñanza

La estructura de la secuencia didáctica incluye actividades de apertura, desarrollo y cierre, acorde al planteamiento de Díaz-Barriga (2013), y es consistente con los planes y programas vigentes del bachillerato en México (SEP, 2017).

Para el desarrollo de la secuencia se han incluido momentos de trabajo individual, en equipos y grupal. La reflexión individual, las interacciones con el grupo y con el profesor son importantes para promover los momentos de argumentación y la negociación de los significados construidos.

El contexto utilizado en las actividades didácticas está directamente vinculado a nuestro entorno social. Se pretende despertar el interés de los estudiantes al presentar situaciones en un contexto de la vida cotidiana donde las matemáticas aparecen como una herramienta útil para la modelación y resolución de problemas, contando además con el apoyo de una herramienta tecnológica-didáctica que privilegia la actividad del estudiante, y que se constituirá en un medio para explorar, analizar, formular conjeturas y ponerlas a prueba.

En cuanto a los conocimientos previos de los estudiantes, será necesario que estos conozcan los números, sus operaciones y propiedades; tener nociones sobre el uso de la literal para representar cantidades desconocidas y manejo básico del plano cartesiano. No se requiere haber utilizado GeoGebra con anterioridad, pues los archivos o applets a utilizar sólo requieren manipulaciones o construcciones muy básicas.

Actividades de Apertura: El propósito de este bloque de actividades es plantear situaciones sencillas encaminadas al conocimiento del contexto, señales y avisos de protección civil, en donde la actividad matemática se limita a poner en juego conocimientos previos como el manejo de números, operaciones y cálculo de áreas, para el establecimiento de relaciones entre las dimensiones de las formas utilizadas para las señales de protección civil y la distancia máxima de observación de la señal. En un primer momento, se les solicita a los estudiantes identificar algunas de las señales plasmadas en las hojas de trabajo para, posteriormente, localizar algunas de ellas en su entorno escolar, laboral o social.

Actividades de Desarrollo: El propósito de la primera actividad de desarrollo es modelar situaciones problema con ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 = c$ $(a \neq 0)$, analizar el proceso de su resolución, así como número y tipo de soluciones, para finalmente dar respuesta al problema planteado. La actividad consiste en determinar la distancia máxima de observación para algunas señales de venta en el mercado, con dimensiones preestablecidas por los fabricantes y decidir si son adecuadas para las necesidades de algunos sitios. Se acuerda trabajar con dimensiones mínimas, por lo que el signo $\geq$ en la expresión algebraica presentada por la Norma, podrá sustituirse por uno de igualdad. Aunque la situación puede ser abordada de forma numérica, resulta mucho más conveniente el uso del lenguaje algebraico. En cuanto a los métodos de resolución, se espera que se movilice el uso de operaciones inversas. Se plantea también la comparación de las soluciones de la ecuación y la solución del problema, con las restricciones que impone el contexto.

Las actividades de desarrollo continúan con el planteamiento de situaciones que pueden modelarse mediante ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx = 0$ ($a \neq 0$ y $b \neq 0$), en donde se requiere analizar los procedimientos de resolución, sus soluciones y la solución del problema original. En esta secuencia la actividad consiste en determinar las dimensiones de dos señales, una triangular y otra rectangular, con la misma base y la misma área, dado que se establece la altura de la señal rectangular. Aunque sí existen tales figuras, las dimensiones del rectángulo no cumplen en ningún caso con la norma que establece que “la proporción del rectángulo podrá ser desde un cuadrado y hasta que la base no exceda el doble de la altura”. Entre los procedimientos para lograr establecer el modelo algebraico se considera la igualación de las expresiones que corresponden a las áreas de ambas figuras, lográndose, así, una ecuación con incógnita en ambos miembros de la ecuación y sin términos independientes. Debe tenerse cuidado de no utilizar propiedades de cancelación para el producto pues, al aplicarla incorrectamente, se descartaría la solución $x = 0$.

En la misma dirección, al proponer la construcción de dos señales, una cuadrada y una triangular, en las que se preserve la suma de sus bases y que corresponda a una medida fija dada, se logrará modelar la situación con una ecuación cuadrática completa, es decir, de la forma ($ax^2 + bx + c = 0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$). Entre los procedimientos para lograr establecer el modelo algebraico se considera la igualación de las expresiones que corresponden a las áreas de ambas figuras de las señales, lográndose así, una ecuación con términos cuadráticos en ambos miembros de la ecuación.

El uso de GeoGebra, en las actividades de desarrollo, se centra principalmente en la construcción y exploración de modelos algebraicos, geométricos, gráficos y tabulares, para la formulación, contrastación, verificación o refutación de conjeturas.

Actividades de Cierre: En las actividades de cierre se discuten las distintas formas que pueden tomar las ecuaciones cuadráticas, dependiendo de los valores de los coeficientes de la misma, partiendo de las formas más simples y avanzando hacia las más complejas. Se analizan el número y tipo de soluciones encontradas para cada una de ellas, así como los diversos procedimientos empleados en la resolución de las mismas: operaciones inversas, factorización, completar cuadrados, completar el trinomio cuadrado perfecto, entre otros. Se parte de casos particulares hasta llegar al caso general y, por ende, al establecimiento de la fórmula general y la discusión de las posibles soluciones.

El uso del software se centra en el manejo de familias de ecuaciones, representaciones geométricas, gráficas, algebraicas, numéricas y tabulares.

Referencias

Díaz-Barriga, A. (2013). *Guía para la elaboración de una secuencia didáctica*. Recuperado el 20 de marzo de 2021, de http://www.setse.org.mx/ReformaEducativa/Rumbo%20a%20la%20Primera%20Evaluaci%C3%B3n/Factores%20de%20Evaluaci%C3%B3n/Pr%C3%A1ctica%20Profesional/Gu%C3%ADa-secuencias-didacticas_Angel%20D%C3%ADaz.pdf

Secretaría de Gobernación. (2011). Norma Oficial Mexicana NOM-003-SEGOB-2011. Señales y avisos para protección civil. - Colores, formas y símbolos a utilizar. Publicada el 23 de diciembre de 2011 en el Diario Oficial de la Federación. Última reforma publicada el 15 de julio de 2015.

Subsecretaría de Educación Media Superior. (2017). Dirección General del Bachillerato. Dirección de Coordinación Académica. Matemáticas I. Disponible en: https://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio.php

Actividades de Apertura

Nombre:____Grupo:_________Fecha: ________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Responde a las preguntas planteadas y realiza lo que se solicita en cada una de las actividades de tus hojas de trabajo.

Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Bloque 1

1. Enseguida se presentan algunas señales utilizadas en materia de protección civil:





a. ¿Cuáles de ellas conoces? ¿Dónde las has visto?

b. Investiga lo que significan el símbolo, la forma y el color.

Bloque 2

1. Comenten la importancia de este tipo de señales para mejorar la seguridad en algunos sitios e instalaciones.

Bloque 3

Nota: Se sugiere realizar este Bloque como tarea extra clase.

1. Localiza una señal de Protección Civil en tu entorno. ¿Puedes distinguirla claramente al colocarte 3 metros frente a ella? ¿Y a los 5 metros? ¿De qué depende que pueda ser claramente visible?

   a. Ahora, aléjate lo más posible, de modo que la señal aún continúe siendo claramente visible para ti. Estima esta última distancia, la cual denominaremos ***distancia máxima de observación***. También realiza las mediciones pertinentes para el cálculo del área de la señal. Registra aquí los datos obtenidos.

2. Repite la actividad anterior con varias señales de Protección Civil en tu entorno. Registra los datos en la siguiente tabla.

Distancia máxima de observación (m)	Área de la señal (cm^2)

Bloque 4

1. La Norma Oficial Mexicana para el diseño de señales de Protección Civil establece que el área de las mismas dependerá de la distancia máxima a la que deberían ser aún legibles, de acuerdo a la siguiente regla:

   "El área de la señal, medida en centímetros cuadrados, debe ser por lo menos cinco veces el cuadrado de la distancia máxima de observación, medida en metros. Para distancias de 5 metros y menores, el área de las señales será como mínimo de 125 cm^2."

   a. Completen los datos faltantes en la siguiente tabla, de acuerdo a la Norma Oficial Mexicana:

Distancia máxima de observación (m)	**Área de la señal (cm^2)**
5	
10	
15	
25	
	4500
50	

   b. Describan los procedimientos que llevaron a cabo para completar la tabla anterior.

   c. Abran el Applet 1 de GeoGebra (Ver Figura 1) y verifiquen las distancias máximas de observación para las áreas propuestas.

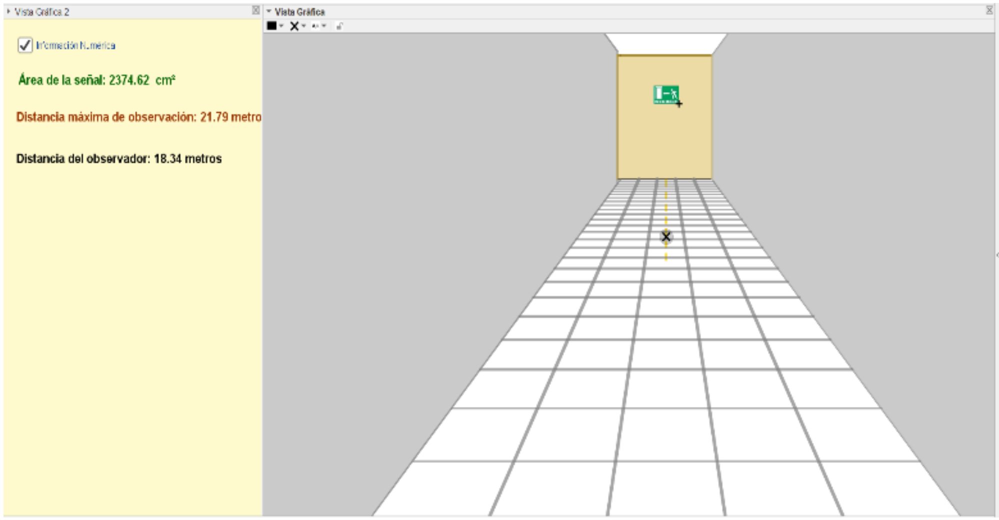
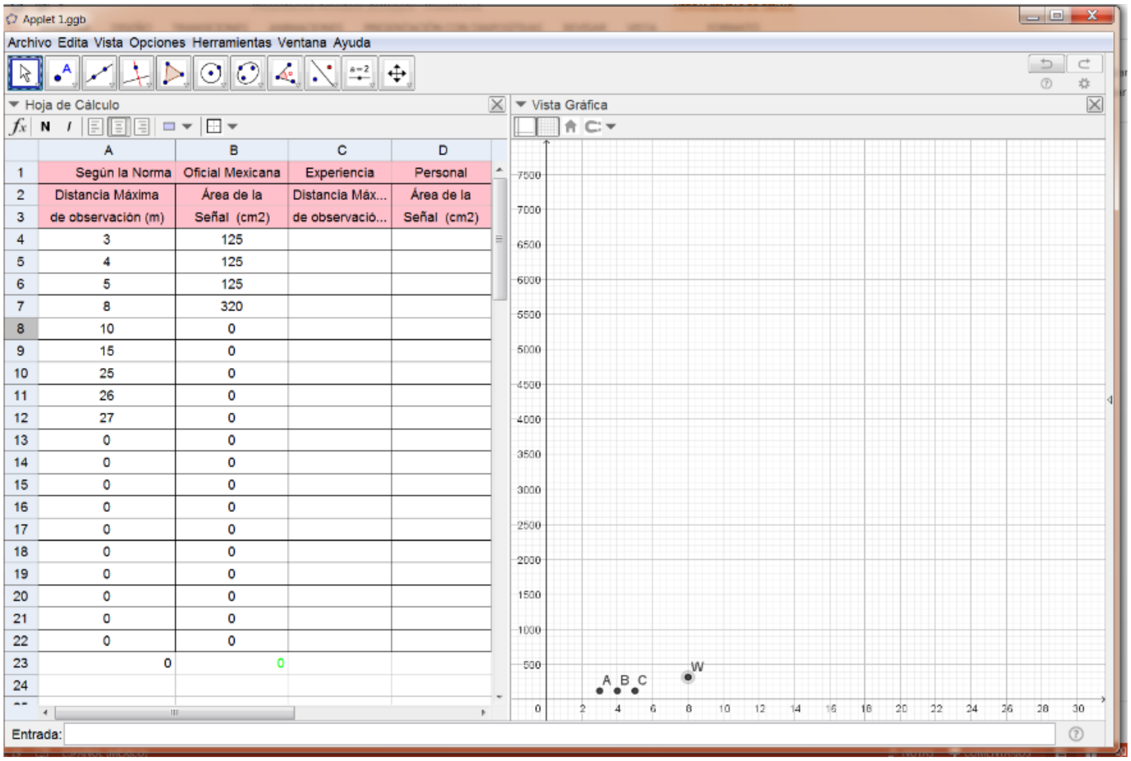


Figura 1. Applet GeoGebra que simula la relación entre el área superficial de la señal y la distancia máxima de observación, según la citada Norma Oficial Mexicana

Bloque 5

1. Abran el Applet 2 de GeoGebra (Ver Figura 2) y completen la tabla de la izquierda utilizando la Norma Oficial Mexicana. Describan la tendencia que presentan los puntos que aparecen en el área gráfica mientras llenan la tabla.



	A	B	C	D
1	Según la Norma	Oficial Mexicana	Experiencia	Personal
2	Distancia Máxima	Área de la	Distancia Máx...	Área de la
3	de observación (m)	Señal (cm2)	de observació...	Señal (cm2)
4	3	125		
5	4	125		
6	5	125		
7	8	320		
8	10	0		
9	15	0		
10	25	0		
11	26	0		
12	27	0		
13	0	0		
14	0	0		
15	0	0		
16	0	0		
17	0	0		
18	0	0		
19	0	0		
20	0	0		
21	0	0		
22	0	0		
23	0	0		
24				

Figura 2. Applet 2 de GeoGebra que incluye una interpretación gráfica

Bloque 6

1. Incluye, ahora, en los renglones correspondientes del Applet 2 (Figura 2), la información que recabaste por tu experiencia personal y que registraste en la tabla del Bloque 3. ¿Qué tan adecuada resulta la Norma Oficial Mexicana para tu agudeza visual? ¿Por qué?

Actividades de desarrollo

Nombre:____Grupo:________Fecha: ________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Continúa con esta secuencia, siguiendo las indicaciones de cada bloque. Discute tus respuestas con tus compañeros de equipo, y no olvides registrar siempre las respuestas en tus hojas de trabajo individual.

Bloque 1

1. La siguiente señal de protección civil es ofrecida por un proveedor en línea, especificando que la medida del ancho es de 25 cm y la de la altura es de 20 cm.

a. Determinen la distancia máxima de observación según la Norma Oficial Mexicana. Escriban a detalle el procedimiento utilizado.

b. ¿Qué consideraciones tendrían que hacer para recomendar su compra a un amigo que es dueño de un local comercial y necesita cumplir con las medidas de seguridad de protección civil y con ello evitar problemas de inspección?

c. Abran el Applet 3 de GeoGebra (Ver Figura 3) y exploren gráficamente la relación entre la distancia máxima de observación y el área de las señales. ¿Es una relación lineal, o no? Escriban fórmulas que representen dicha relación y expliquen para qué valores de la distancia máxima de observación la relación es cuadrática.

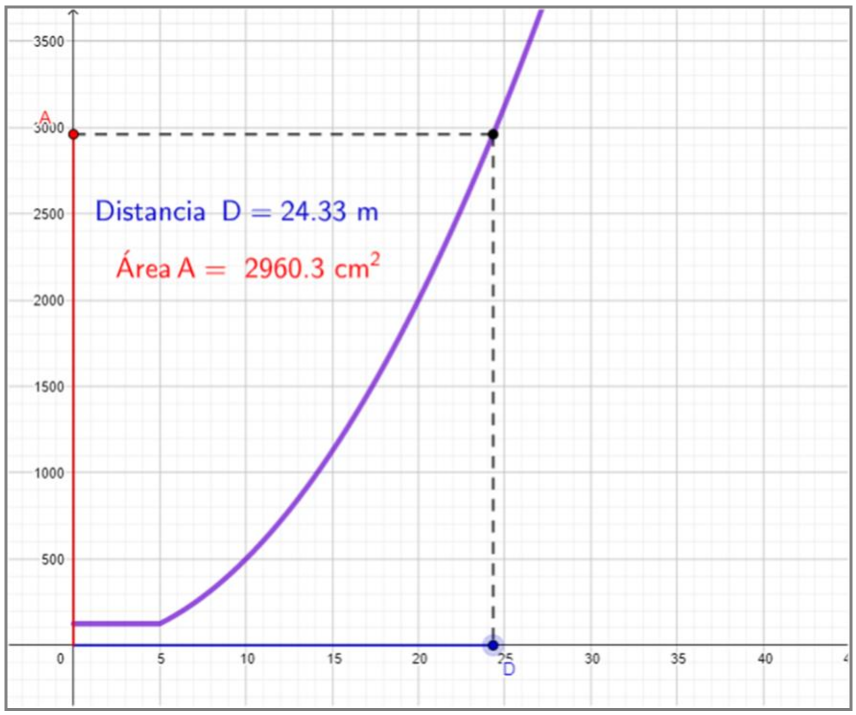


Figura 3. Representación gráfica de la relación entre la distancia máxima de observación y el área de las señales.

d. Si se desea que la señal sea visible desde una distancia de 18 m, ¿qué área debería tener, mínimamente, la señal para cumplir con la norma?

e. Determinen también el ancho y la altura de la nueva señal, de modo que se conserve la proporción entre los lados de la señal original mostrada al inicio de este bloque. Escriban con detalle sus procedimientos.

Bloque 2

1. Se requiere fabricar dos señales que se colocarán sobre una pared angosta, una debajo de la otra. Se ha solicitado que ambas señales tengan la misma área, pues se espera que sean visibles desde la misma distancia. Además, por cuestiones de diseño, se ha especificado que ambas señales tengan el mismo ancho en su base y que la altura de la señal rectangular sea de 20 cm.

a. Expresen algebraicamente la condición de igualdad de áreas planteada en el problema.

b. ¿Qué tipo de ecuación obtuvieron?

c. Resuélvanla por algún método conocido. Compartan el procedimiento y solución obtenida con los demás compañeros.

d. Discutan si la solución obtenida cumple con la Norma Oficial que estipula que, para una señal rectangular, "la proporción del rectángulo podrá ser desde un cuadrado y hasta que la base no exceda el doble de la altura".

Bloque 3

1. Se dispone de una lámina de 90 cm de longitud y se deben diseñar dos señales con áreas iguales, de modo que puedan ser visibles desde una misma distancia. Una de ellas tiene forma triangular y la otra es cuadrada. Se desea usar toda la longitud de la lámina, por lo que la suma de las bases de las dos señales deberá ser igual a 90 cm.

a. Abran el Applet 4 (Figura 4) de GeoGebra para ver una simulación de las dos señales, de modo que la suma de sus bases se ha fijado en 90 cm. Arrastren el punto C para cambiar las medidas de las bases y analiza lo que pasa con las áreas correspondientes. Estimen un valor para la base, de modo que las áreas sean iguales.

Figura 4. Señales triangular y cuadrada

b. Si denotamos con la literal x la medida de la base del triángulo, ¿cómo quedaría denotada la base del cuadrado, dado que la suma de ambas señales debe ser igual a 90 cm?

c. Escriban la expresión algebraica para el área de cada señal y expresen la condición de igualdad de áreas planteada en el problema. ¿Qué tipo de ecuación obtuvieron?

d. Abran el Applet 5 (Figura 5) de GeoGebra en el que se han incluido representaciones gráficas para el área de cada señal. Identifiquen cuál es la que corresponde al área de cada señal. ¿Qué representa el punto de corte entre ambas?

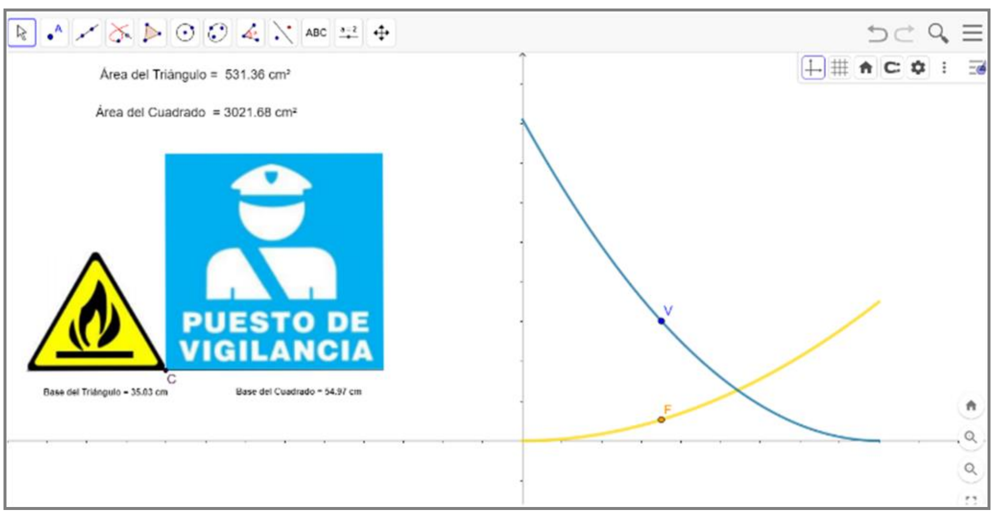


Figura 5. Representaciones gráficas para el área de cada señal

e. Resuelvan la ecuación por algún método conocido. Compartan el procedimiento y solución obtenida con los demás compañeros.

f. Determinen el área de ambas señales. ¿Cuál será la distancia máxima de observación de las mismas, según la Norma Oficial Mexicana?

Bloque 4

1. Repitan la actividad presentada en el Bloque 3 pero considerando una señal rectangular y una señal cuadrada. Consideren además que la altura de la señal rectangular debe ser fijada en 30 cm. Recuerden que la suma de las bases debe ser 90 cm.

a. Abran el Applet 6 (Figura 6) de GeoGebra en el que se ha incluido una simulación de las señales y una gráfica para la expresión del área de cada una de ellas. Identifiquen cuál es la que corresponde al área de cada señal y estimen las medidas de las bases correspondientes de modo que las áreas sean iguales.

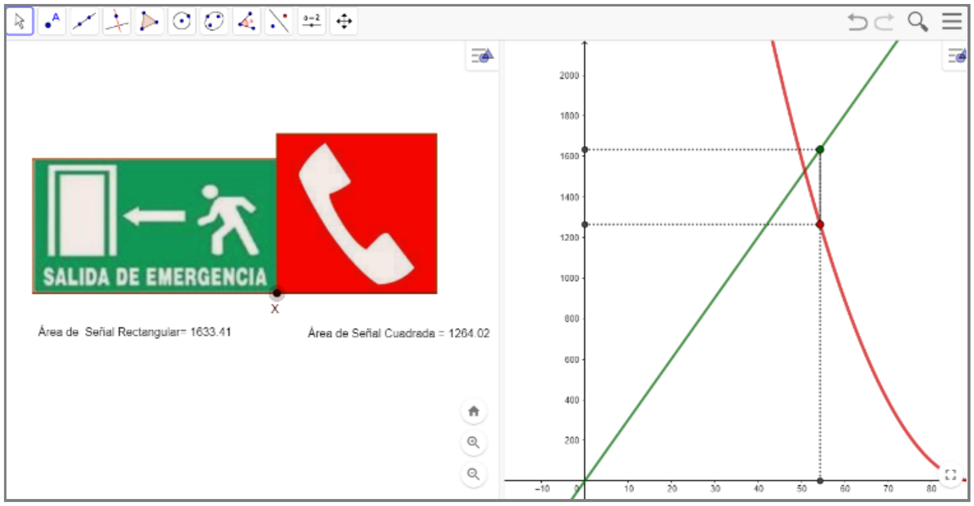


Figura 6. Señales y gráficas correspondientes.

b. Expresen la condición de igualdad entre las áreas de las señales, denotando la base de la señal rectangular con la literal x.

c. Resuelvan la ecuación obtenida por algún método conocido. Compartan el procedimiento y solución obtenida con los demás compañeros.

d. Determinen el área de ambas señales. ¿Cuál será la distancia máxima de observación de las mismas, según la Norma Oficial Mexicana?

Actividades de cierre

Nombre: ____ Grupo:__________ Fecha: _________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Finalicen esta secuencia siguiendo las indicaciones de cada bloque. Como antes, discutan todas sus respuestas con sus compañeros de equipo, pero no olviden registrar siempre las respuestas en sus hojas de trabajo individual.

Bloque 1

Los problemas abordados hasta este momento en esta secuencia han conducido a establecer ecuaciones con una incógnita en la que aparecen términos de grado dos y, posiblemente, términos de grado uno y de grado cero.

1. Discutan con los compañeros de equipo, la razón por la que las ecuaciones en cada recuadro son equivalentes entre sí. Seleccionen de cada grupo, cuál es la más fácil de resolver y encuentren sus soluciones. ¿Cuántas son en cada caso?

a) $500 = 5x^2$ $x^2 = 100$ $x^2 - 100 = 0$	b) $1620 = \frac{20}{25}x^2$ $x^2 = 2025$ $x^2 - 2025 = 0$
c) $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 20x$ $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - 20x = 0$ $x\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x - 20\right) = 0$	d) $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = (90 - x)^2$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - 1\right)x^2 + 180x - 8100 = 0$
e) $30x = (90 - x)^2$ $x^2 - 210x + 8100 = 0$ $(x - 105)^2 = 2925$	

Enseguida profundizaremos sobre este tipo de ecuaciones, mismas que denominamos "ecuaciones de segundo grado" o "ecuaciones cuadráticas".

La forma general de una ecuación cuadrática con una incógnita se escribe:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0 \ \text{ con } \ a \neq 0}$$

Estas ecuaciones pueden escribirse de formas diferentes, pero siempre es posible que la ecuación sea escrita en esta forma particular, es decir, sin factores e igualada a cero, lo cual se conoce como la "forma desarrollada" o "estándar" de la ecuación cuadrática. En una ecuación cuadrática se pueden distinguir tres términos:

El término cuadrático $\boldsymbol{ax^2}$

El término lineal $\boldsymbol{bx}$

El término independiente $\boldsymbol{c}$

Cuando $b = 0$, la ecuación se reduce a $ax^2 + c = 0$ y cuando $c = 0$ se reduce a una de la forma $ax^2 + bx = 0$. En estos dos casos se dice que la ecuación es "**incompleta**".

Notemos que si $\mathrm{b} = 0$ y $\mathrm{c} = 0$, la ecuación se reduce a la expresión $ax^2 = 0$, la cual tiene por solución $x_1 = x_2 = 0$, pues $a \neq 0$.

Cuando a, b y c son distintos de cero se dice que la ecuación cuadrática es "**completa**".

Bloque 2

1. ¿Por qué en la expresión desarrollada de una ecuación cuadrática se requiere que $a \neq 0$?

2. Ahora, examinen el procedimiento de transformación de la ecuación cuadrática completa expresada en su forma general, completando el trinomio cuadrado perfecto, para así obtener una ecuación equivalente cuya resolución requiere únicamente de operaciones inversas.

Dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, verifiquen que, al completar el trinomio cuadrado perfecto, la ecuación queda expresada como:

$$\left(x - \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{2a} = 0$$

que a su vez es equivalente a:

$$\left(x - \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{2a}$$

1) Escriban las transformaciones necesarias para dicha verificación:

3. Ahora, verifiquen que al despejar el valor de x en esta última expresión, se obtiene:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Con esta fórmula pueden encontrar las soluciones de cualquier ecuación cuadrática, ya sea completa o incompleta, por lo que se le conoce como la **Fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita, incluso a veces simplemente se dice "fórmula general"**.

Sin embargo, dependiendo de la forma de la ecuación puede ser más económico despejar la variable mediante operaciones inversas directas, como en el caso $ax^2 + c = 0$ o emplear un método de factorización, como en los casos $ax^2 + bx = 0$ (factor común) ó $ax^2 + a(r_1 + r_2)x + ar_1r_2 = 0$ (producto de binomios lineales cuando $r_1r_2 \neq 0$) o despejar la variable x después de completar un trinomio cuadrado perfecto y haber obtenido $(x + h)^2 = k$.

Bloque 3

Analizarán ahora la naturaleza de las soluciones encontradas en el Bloque 2 y su relación con los métodos de resolución, en particular con el de la fórmula general.

1. ¿Cuántas soluciones encontraron para la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ en cada caso, esto es, “incompleta” o “completa”?

2. Enlisten los métodos que conocen al momento para resolver este tipo de ecuaciones.

3. De los métodos conocidos, la fórmula general proporciona explícitamente las soluciones de una ecuación cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Escriban las soluciones de la ecuación por separado.

La expresión que se encuentra dentro del radical es conocida como discriminante y su valor proporciona información relevante sobre el tipo de soluciones de la ecuación.

Para aclarar lo anterior, completen la columna "Tipos de soluciones" de la siguiente tabla, utilizando en cada caso una de las siguientes expresiones, explica en cada caso, el porqué de tu elección.

- Dos soluciones reales distintas.
- Dos soluciones reales iguales.
- Dos soluciones no reales.

Discriminante	Tipos de soluciones	¿Por qué?
$b^2 - 4ac < 0$		
$b^2 - 4ac > 0$		
$b^2 - 4ac = 0$		

4. Encuentren las soluciones reales de las siguientes ecuaciones, en caso de tenerlas.
    a. $x^2 + 8x + 16 = 0$

    b. $2x^2 - 7x - 15 = 0$

c. $x^2 + x + 1 = 0$

Bloque 4

Analizarán ahora la ecuación cuadrática en su representación gráfica, vinculada a otras representaciones posibles. Para esto utilizaremos la expresión $y = ax^2 + bx + c$, que está asociada a la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Abran el Applet 7 (Figura 7) que muestra ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$. Utilicen los deslizadores para cambiar los valores de a y c (Recuerden que $a \neq 0$). Asimismo, arrastren el punto A para buscar las soluciones de la ecuación en la gráfica, en la representación numérica y en la representación tabular. Discutan cómo deben ser los valores de a y c para que la ecuación tenga soluciones reales y determinen un método algebraico para encontrar sus soluciones. ¿Qué relación existe entre estas soluciones reales? Escriban sus conclusiones en el siguiente espacio.

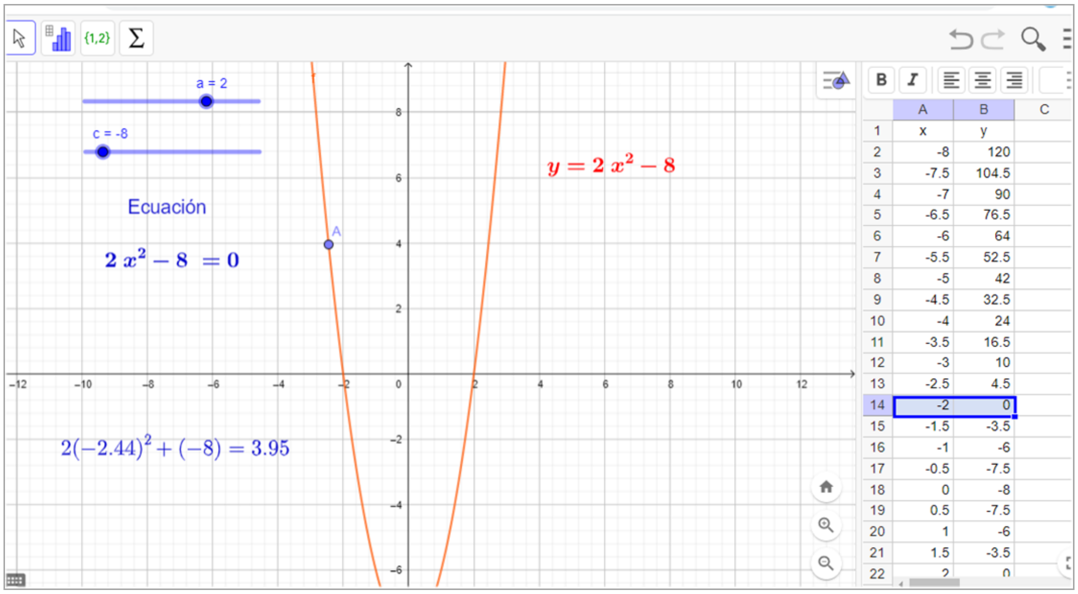


Figura 7. Applet 7 con ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$ y múltiples representaciones dinámicamente vinculadas

2. Abran el Applet 8 (Figura 8) que muestra ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$. Repitan los análisis de la actividad del punto anterior y escriban sus conclusiones en el siguiente espacio.

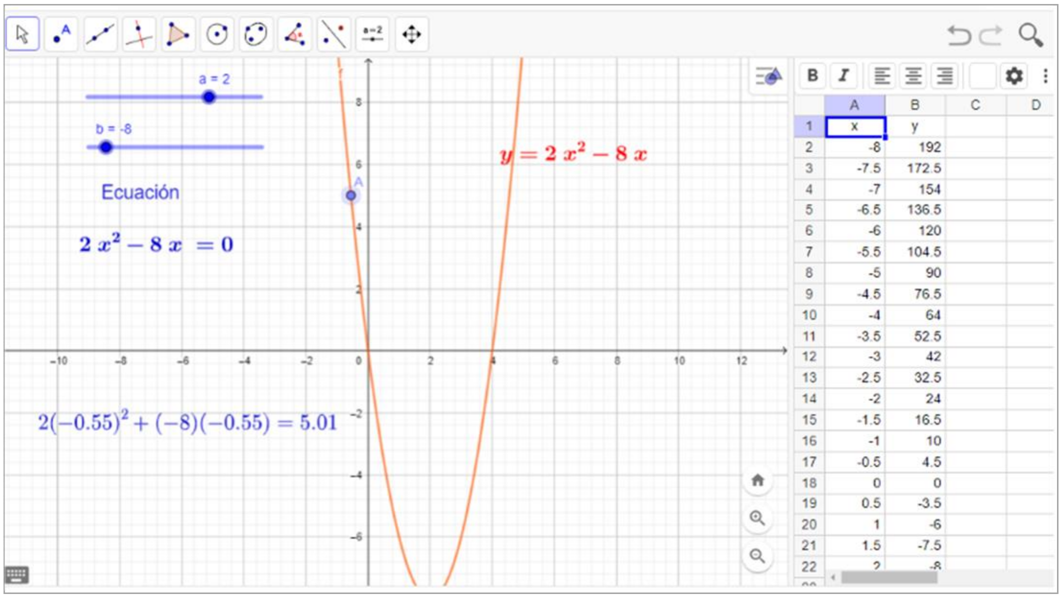


Figura 8. Applet 8 con ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$ y múltiples representaciones dinámicamente vinculadas

3. Finalmente, abran el Applet 9 (Figura 9) que muestra ecuaciones completas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Repitan los análisis de la actividad del punto anterior.

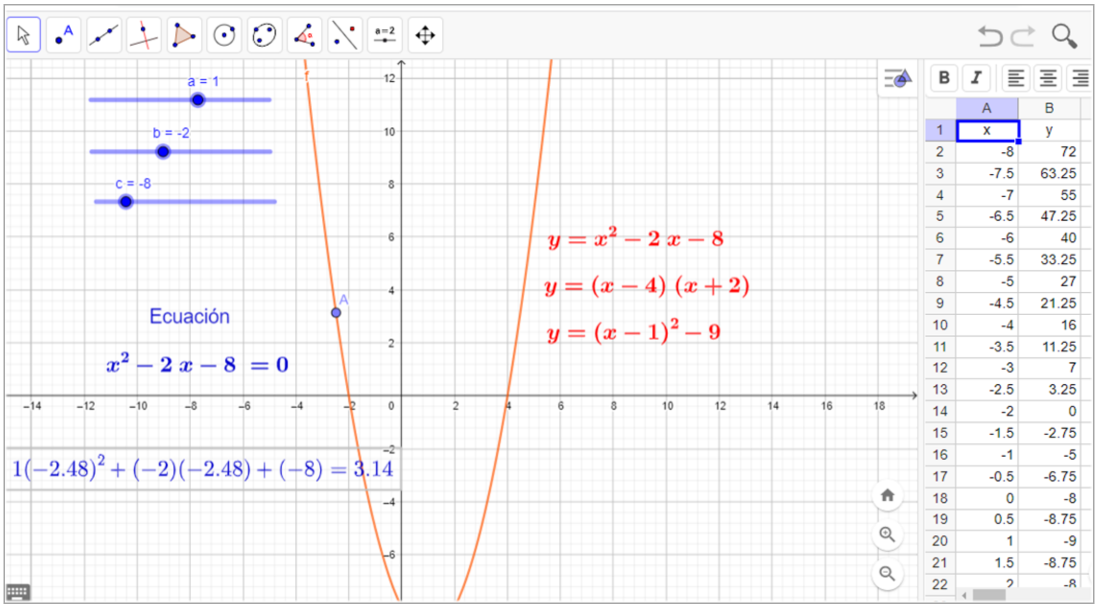


Figura 9. Applet 9 con ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y múltiples representaciones dinámicamente vinculadas

Capítulo 2: Activité pour les futurs enseignants de mathématiques : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble

Actividad didáctica

Christian Boissinotte[1]

Problématique et proposition d'apprentissage

On vise à ce que les étudiants (futurs enseignants du secondaire) reconnaissent le potentiel de la modélisation en 3D produite dans un logiciel de géométrie dynamique pour résoudre certains problèmes qui font appel à la visualisation spatiale. On s'attend à ce que les étudiants soient ensuite aptes à favoriser le développement de telles instrumentalisations chez les élèves du secondaire en situation de résolution de problèmes dans un environnement semblable.

Concepts mathématiques impliqués

Généraux: résolution de problèmes, visualisation, géométrie plane, variation, optimisation, modélisation d'une situation réelle ou mathématique, modèle tridimensionnel.

Spécifiques: sens de variation, covariation, fonction de deux variables, graphique d'une fonction de deux variables, optimisation: minimum d'une fonction de coût à deux variables.

Autres concepts ou processus pouvant être sollicités : somme impliquant des taux, minimum d'un ensemble de valeurs, paramètres, valeur d'une expression, relation fonctionnelle à une et à deux variables indépendantes, changement de registre, optimisation par les dérivées dans un module de calcul symbolique.

Niveau d'étude

Programme universitaire de premier cycle : Baccalauréat en enseignement au secondaire en mathématiques, formation initiale des enseignants

Nombre d'activités et durée prévue

Une activité de 3 heures

Matériel nécessaire

- Feuilles de travail pour l'étudiant, avec l'énoncé du problème et des espaces prévus pour les notes personnelles, la planification et la résolution;
- Programmes d'études du secondaire et du cégep en mathématique;
- Accès à *GeoGebra* version 5 ou plus pour chaque équipe d'étudiants;
- Rétroprojecteur avec transparents ou projecteur avec dispositif de partage d'écran ou caméra document (pour utiliser dans les discussions de groupe);

[1] Université du Québec à Montréal, Canada.

- Optionnellement, on peut avoir du matériel de manipulation comme des boîtes vides, des jeux de boules et tiges pour faire des arètes de solides, et tout ce qui peut être instrumentalisé dans la classe.

Méthode et recommandation d'enseignement

Nous recommandons à l'enseignant professeur (formateur d'enseignants) de faire vivre l'activité sous une approche ACODESA (**A**pprentissage **co**llaboratif, **dé**bat **s**cientifique et **a**utoréflexion, Hitt, 2007) qui favorise un usage coordonné de différents registres dans le cadre d'un processus de modélisation.

> Cette méthode d'enseignement est une combinaison articulée d'apprentissage collaboratif (Davidson, 1998), de débat scientifique (Alibert et Thomas, 1991; Legrand, 2001), et d'auto-réflexion (Hadamard, 1945/1975). (Description traduite de F. Hitt et González-Martín, 2015. p.6)

Il est préférable d'avoir fait préalablement avec les futurs enseignants une exploration de base des différents modules de *GeoGebra* (algèbre, outils géométriques et graphiques, construction 3D, calcul formel) pour que ces étudiants soient à l'aise avec la ressource et qu'ils puissent considérer qu'il serait utile d'y faire appel pendant la réalisation de l'activité.

L'activité est composée de 6 blocs qui s'inspirent du modèle ACODESA :

- Bloc 1 : Un travail individuel pour étudier la question proposée;
- Bloc 2 : Un travail en équipes où est discuté ce qui a été produit de façon individuelle dans le Bloc 1;
- Bloc 3 : Retour en grand groupe pour partager sur ce qui a été fait dans les différentes équipes;
- Bloc 4 : Un retour en équipes pour avoir l'occasion de se repositionner par rapport à ce qui a été partagé en grand groupe;
- Bloc 5 : Discussion finale en grand groupe;
- Bloc 6 : Travail individuel – une autoréflexion sur ce qui a été retenu par chacun des futurs enseignants.

Le problème présenté place les futurs enseignants dans à une situation réaliste.

Le but de l'activité est de créer un contexte où il semble avantageux de faire appel à une utilisation non triviale de ressources logicielles particulières. Cette activité se situe dans le prolongement de la réflexion sur l'omniprésence de la technologie et sur la façon de l'instrumentaliser pour résoudre des problèmes plus difficiles et différents de ceux que l'on propose traditionnellement.

Comme elle se retrouve en contexte d'une réflexion didactique, les étudiants sont implicitement invités à se créer une représentation ostensive au besoin (boîte vide, cubes, cordes, etc.) ou virtuelle; ils ont en effet accès à un ordinateur avec certains logiciels, dont *GeoGebra* avec son module de graphiques 3D. Ils se demanderont peut-être si ces artefacts sont de ceux qui pourraient aider leurs élèves à apprendre quelque chose d'intéressant et d'utile pour eux. Ils doivent donc adopter en alternance les deux positions épistémologiques d'étudiant universitaire et de futur enseignant au secondaire.

Concrètement, ils auront à déterminer la manière la plus économique de relier deux endroits par un câble électrique en ayant à leur disposition trois options qui peuvent se combiner. Ce genre de problème est tout à fait nouveau au secondaire car on l'aborde habituellement en résolvant le système donné par l'annulation des dérivées partielles. Comme cette méthode ne s'enseigne que plus tard, au cégep, les élèves devront faire appel à d'autres moyens, comme la modélisation. Faire un schéma précis à main levée peut être assez difficile pour un phénomène qui se produit en trois dimensions. La représentation mentale chez l'élève sera grandement facilitée par la manipulation d'une figure tridimensionnelle alors que la création de celle-ci sera tributaire d'un processus d'analyse et de compréhension de la situation problème. Les futurs enseignants devront évaluer s'ils donnent aux élèves un fichier avec la construction déjà faite ou s'ils pensent qu'ils apprendront quelque chose d'utile à la résolution d'un plus grand nombre de problèmes en prenant le temps de créer eux-mêmes le modèle géométrique. Les difficultés seront probablement reliées à cette construction elle-même ainsi qu'à la méthode d'obtention d'une solution (donnée par action directe sur le modèle et une vision synthétique, ou encore par la traduction algébrique du comportement du modèle et une approche analytique dans ce registre).

La situation initiale serait un exercice d'application pour des étudiants de cégep mais une vraie situation problème au secondaire, sauf peut-être quand on fait appel à la technologie, car la difficulté consiste à trouver le minimum sans avoir accès au concept de dérivée.

SITUATION INITIALE (problème-type, s.d.)

1. On veut relier un câble électrique d'un point C à la surface d'un terrain à un relais B situé sous terre. Cependant, le relier en ligne droite supposerait de l'enfouir entièrement sous terre; or le coût pour un câble enfoui est supérieur à une même longueur de câble installée en surface. On pourrait aussi l'amener en A, à la verticale de la cible B et creuser ensuite vers le bas jusqu'à B. Mais ce n'est pas non plus la solution la plus économique car la longueur de câble est alors maximale, ce qui vient faire perdre l'avantage de l'économie gagnée en surface. Le problème est donc de trouver la configuration la plus économique, en fonction de la position du point D sur le chemin de C à A où on débutera à creuser en ligne droite vers B, et des coûts respectivement en surface et sous terre de l'acheminement du câble.

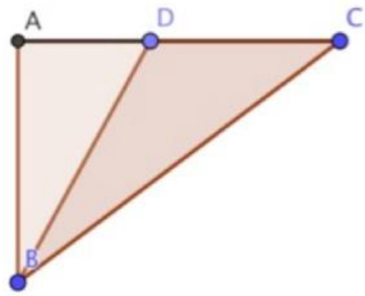


Figure 1 : représentation de la situation initiale

SITUATION PROBLÈME (créée par l'auteur du texte)

2. Si l'on suit une route existante, le tracé en surface coûtera encore moins cher car les véhicules y auront facilement accès. Alors comment exploiter cette information pour minimiser les coûts?

VARIABLES DIDACTIQUES

Pour contextualiser un peu mieux les connaissances sur la situation, on décide de poser des valeurs choisies arbitrairement pour les distances et les coûts de chaque type d'installation. Dans tous les cas, on pourrait considérer que la distance de C à B est de 50 mètres et que le point B se situe à 30 mètres de profondeur. On suppose aussi que le terrain est plat. On considère les coûts de l'installation sous terre à 700$ le mètre, alors qu'en surface, c'est plutôt 400$ le mètre, sauf si on suit une route. Dans ce cas le coût est de 300$ le mètre.

GÉNÉRALISATION DU MODÈLE (À PROPOSER EN DEVOIR)

Étudier la variation de la solution si l'on considère les valeurs que l'on vient d'indiquer comme des paramètres modifiables. Doit-on tout recommencer le travail si certaines de ces données diffèrent (changement de coût, du point de départ, etc.)? Le modèle permet-il de répondre à la question dans le cas général?

Bloc 1 : Un travail individuel pour étudier la question proposée (15 minutes)

Dans cette première partie, les enseignants en formation vont tenter de s'approprier la situation et d'amorcer une résolution du problème de façon individuelle avec les outils dont ils disposent. On leur demande de pouvoir adopter en fait deux positions épistémologiques différentes au cours de cette réflexion, soit celle d'étudiant universitaire qui doit résoudre un problème, mais aussi celle du futur enseignant qui anticipe et imagine les stratégies que leurs élèves du secondaire pourraient mettre de l'avant. Dans le premier cas, ils chercheront parmi les savoirs et savoir-faire à leur disposition ceux qui leur permettraient d'avancer vers une réponse. Dans le second cas, leur réflexion portera sur les heuristiques susceptibles d'être mises en œuvre par leur élèves, considérant les acquis que les programmes d'études permettent d'espérer à ce niveau (2^{e} cycle du secondaire, 14 ans à 17 ans).

Pour les aider, ces programmes de formation seront distribués aux étudiants; ils auront ainsi accès aux concepts en jeu aux différents niveaux scolaires. Ils devront également procéder à une analyse didactique de la situation. Voici les questions qui leur sont posées dans ce premier bloc :

1. Quelle stratégie utiliserais-tu pour avoir une vision claire du problème et de ce qui est demandé? À quel niveau scolaire crois-tu que cette stratégie serait accessible?
2. Réalise un schéma qui représente la situation en indiquant clairement tous les éléments connus.
3. Que faudrait-il déterminer pour pouvoir progresser vers la solution? Quelles sont les méthodes possibles pour déterminer ces éléments? À quel niveau scolaire chacune de ces méthodes est-elle accessible?

La question 2 demande aux étudiants de schématiser le problème. La figure 2 donne une possible schématisation de la situation problème (pour la situation initiale, il suffit de considérer le cas où la distance de F à C est nulle):

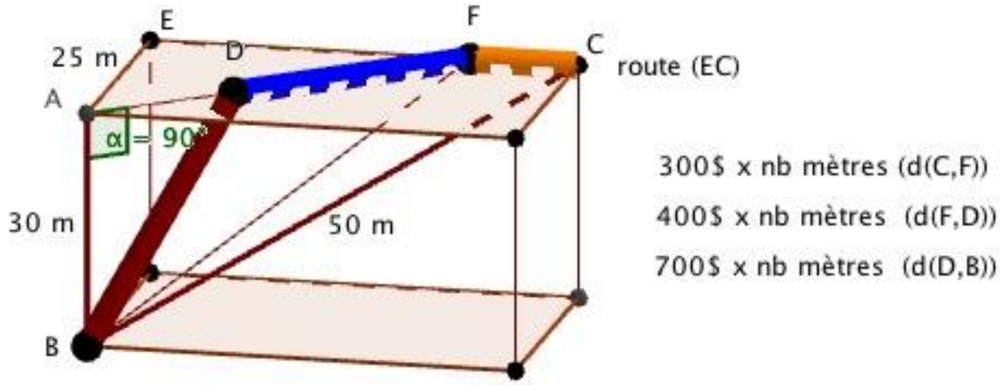


Figure 2 : modélisation de la situation problème

Il est à remarquer que c'est intentionnellement que la distance de A à la route EC n'est pas précisée, dans le but d'activer un processus de contrôle chez les étudiants. Ils devront réagir d'une façon ou d'une autre pour faire face à cette lacune (Saboya, Bednarz et Hitt, 2015).

Bloc 2 : Un travail en équipes où est discuté ce qui a été produit de façon individuelle dans le Bloc 1 (20 minutes)

Après une relecture du problème, pour s'assurer d'une compréhension commune au sein de chaque équipe, on confronte les interprétations individuelles de la tâche. Les équipiers débattent de la façon de la réaliser, et plus particulièrement des pistes d'action qu'ils ont envisagées. Ils mettent en commun leurs idées sur la façon dont les élèves du secondaire seraient susceptibles de procéder ainsi que les savoirs qu'il leur serait nécessaire de mobiliser.

Parmi les approches « naïves », on pourrait faire une boîte à l'échelle, un genre de maquette, et multiplier les mesures par le coût rattaché à chaque partie du trajet ainsi que par le facteur d'échelle, bien sûr.

En mesurant et en calculant un nombre de cas limité, les étudiants peuvent estimer une réponse approximative. Mais la démarche est très laborieuse et imprécise et implique beaucoup de tâtonnements et de calculs répétitifs. Les étudiants vont être amenés à se questionner sur l'apport de la calculatrice. Voici les questions proposées dans ce bloc :

4. Comparez vos réponses en 1., 2. et 3. du bloc 1. Avez-vous un portrait clair de la situation? Pouvez-vous énoncer explicitement le but visé?
5. Entendez-vous sur un plan d'attaque pour faire avancer la résolution du problème en précisant ce que la géométrie et l'algèbre peuvent apporter respectivement (à vous et aussi à vos élèves). Allez-vous privilégier une approche papier-crayon-calculatrice ou un usage plus particulier de la technologie?

Bloc 3 : Retour en grand groupe pour partager sur ce qui a été fait dans les différentes équipes (20 minutes)

Le formateur d'enseignants aura ici pour objectif de rendre visibles au groupe les différentes démarches adoptées par les équipes d'étudiants universitaires dans leur rôle d'apprenant et en tant que futurs enseignants qui tentent d'anticiper ce que les élèves du secondaire peuvent faire.

Chaque équipe va présenter les réflexions qui ont émergé de leurs discussions. Un retour en groupe permettra de verbaliser les limites des approches tentées. On évoquera sûrement la construction d'une fonction à 2 variables (la 3^{e} mesure est déterminée par le choix des 2 autres; de plus, la première variable a une incidence sur le domaine de la deuxième) dont il faudra trouver la valeur minimale (coût). La construction de cette équation en elle-même constitue un défi pour les étudiants de 2^{e} cycle du secondaire (14 à 16 ans) car elle nécessite d'utiliser trois fois la relation de Pythagore avec des quantités parfois inconnues et dans des plans différents de l'espace. Il se pourrait très bien que les étudiants n'aient pas encore déterminé l'équation finale à ce stade-ci ou même qu'ils n'aient pas l'intention de la déterminer en ayant comme objectif de travailler dans le contexte d'une réplique manipulable de la réalité. D'ailleurs, le premier choix fait passer du modèle figural à un modèle algébrique et s'inscrit donc dans une démarche de conversion entre registres sémiotiques de représentation (Duval, 1993).

Pour le bénéfice du lecteur, je donne ici une construction possible de l'équation, basée sur une analyse théorique du modèle par algébrisation (Voir figure 2 plus haut pour mieux suivre les étapes).

On aura sûrement reconnu que la fonction de coût à optimiser (minimiser) est

$$C(x, y) = \mathrm{d(C, F)} \times 300 + \mathrm{d(F, D)} \times 400 + \mathrm{d(D, B)} \times 700$$

On peut utiliser directement les distances données par *GeoGebra* et observer comment varie la valeur de la fonction quand on change ces distances mais on peut aussi établir un modèle algébrique par conversion du modèle figural.

Posons d(C,F) = x et d(F,D) = y. Il faut exprimer d(D,B) en fonction de x et y. Comme DAB est un triangle rectangle, il suffit de connaître les deux cathètes et d'utiliser la relation de Pythagore. L'une vaut 30 et l'autre est y de moins que la d(A,F).

Pour connaître la d(A,F) il faut connaître les mesures des cathètes du triangle rectangle FEA. L'une vaut 25 (mais on ne le dit pas immédiatement, voir juste avant le bloc 2, plus haut) et l'autre vaut x de moins que d(C,E), il reste donc à déterminer cette dernière distance. On peut la trouver à l'aide du triangle rectangle CAB à la condition de connaître d(A,E), distance de la route à la verticale du point de jonction. Les étudiants vont sûrement s'inquiéter de la donnée manquante et devront décider s'ils posent un paramètre ou une valeur particulière, comme 25 m. Ils peuvent aussi demander une proposition au formateur.

Toutes les valeurs étant ainsi déterminées, on peut construire l'équation. La relation de Pythagore fait intervenir des mesures de segments dans les triangles rectangles.

$\mathrm{m}\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$; on avait reconnu le triplet de Pythagore 3,4,5 décuplé.

$\mathbf{m}\overline{\mathbf{CE}} = \sqrt{40^2 - 25^2} = \sqrt{1600 - 625} = 5\sqrt{39}$

$$\mathbf{m}\overline{\mathbf{EF}} = \mathbf{m}\overline{\mathbf{CE}} - \mathrm{m}\overline{\mathrm{CF}} = \mathbf{m}\overline{\mathbf{CE}} - x$$

$$\mathbf{m}\overline{\mathbf{AF}} = \sqrt{\mathbf{m}\overline{\mathbf{EF}}^{\,2} + 25^2}$$

$$\mathbf{m}\overline{\mathbf{AD}} = \mathbf{m}\overline{\mathbf{AF}} - \mathrm{m}\overline{\mathrm{FD}} = \mathbf{m}\overline{\mathbf{AF}} - y$$

$$\mathbf{m}\overline{\mathbf{DB}} = \sqrt{\mathbf{m}\overline{\mathbf{AD}}^{\,2} + 30^2}$$

$$\mathbf{m}\overline{\mathbf{DB}} = \sqrt{(\mathbf{m}\overline{\mathbf{AF}} - y)^2 + 30^2}$$

$$\mathbf{m}\overline{\mathbf{DB}} = \sqrt{\left(\sqrt{\mathbf{m}\overline{\mathbf{EF}}^{\,2} + 25^2} - y\right)^2 + 30^2}$$

$$\mathbf{m}\overline{\mathbf{DB}} = \sqrt{\mathbf{m}\overline{\mathbf{EF}}^{\,2} + 25^2 + y^2 - 2y\sqrt{\mathbf{m}\overline{\mathbf{EF}}^{\,2} + 25^2} + 30^2}$$

$$\mathbf{m}\overline{\mathbf{DB}} = \sqrt{\left(5\sqrt{39} - x\right)^2 + 1525 + y^2 - 2y\sqrt{\left(5\sqrt{39} - x\right)^2 + 25^2}}$$

$$\mathbf{m}\overline{\mathbf{DB}} = \sqrt{x^2 - 10x\sqrt{39} + 975 + 1525 + y^2 - 2y\sqrt{x^2 - 10x\sqrt{39} + 975 + 625}}$$

En effectuant les substitutions à la chaîne, on obtient l'équation finale :

$$C(x, y) = \mathbf{m}\overline{\mathbf{CF}} \times 300 + \mathbf{m}\overline{\mathbf{FD}} \times 400 + \mathbf{m}\overline{\mathbf{DB}} \times 700$$

$$C(x, y) = 300x + 400y + 700\sqrt{30^2 + \left(\sqrt{\left(\sqrt{50^2 - (30^2 + 25^2)} - x\right)^2 + 25^2} - y\right)^2}$$

ou, en complétant les calculs: (La forme ci-dessus est intéressante car elle permettrait de remplacer les nombres par les mesures symboliques des mêmes segments en une paramétrisation généralisante du modèle.)

$$C(x, y) = 400y + 300x + 700\sqrt{y^2 - 2y\sqrt{(x^2 - 10\sqrt{39}\,x + 1600)} + x^2 - 10\sqrt{39}\,x + 2500}$$

Le cas limite où l'on creuse en partant en ligne droite vers la cible: $C(0,0) = 35000$.

Celui où on demeure dans un même plan (comme dans la situation originale mais avec y au lieu de x); on avance de y en surface avant de plonger:

$$C(0, y) = 400y + 700\sqrt{y^2 - 80y + 2500}$$

Avec $y = 0$ on retrouve la situation où on suit la route et on creuse vers la cible à partir d'un point sur la route. L'équation se réduit à ceci:

$$C(x, 0) = 300x + 700\sqrt{x^2 - 10\sqrt{39}\,x + 2500}$$

Quant à la façon de trouver le minimum de la fonction à deux variables, sans faire appel aux dérivées partielles (niveau cégep), c'est le défi suivant que les équipes devront surmonter. Certains proposeront que la méthode par tâtonnement pourrait être rendue plus efficiente par la création d'un modèle manipulable dans *GeoGebra* 3D et permettrait d'éviter toute cette algèbre. S'ils obtiennent une réponse précise au cent près, ou même au dollar près, pourrait-on leur donner raison?

Bloc 4 : Un retour en équipes pour avoir l'occasion de se repositionner par rapport à ce qui a été partagé en grand groupe (50 minutes)

De retour en équipes, si ce n'est pas déjà fait, certains attaqueront la suite du problème en cherchant l'équation algébrique fonctionnelle dont il faut trouver le minimum et d'autres s'attaqueront au problème par une modélisation figurale de la situation dans *GeoGebra* 3D. Mais précisons que la recherche de la fonction peut être facilitée par cette même modélisation figurale. Ils devront trouver une échelle convenable (ou ajuster les axes) et permettre la variation dynamique des variables en jeu. Ils auront à créer un calcul qui fait intervenir les longueurs réelles représentées par les segments, pondérées par leurs coûts respectifs de construction dans la réalité. Ils devront aussi trouver une façon de présenter le résultat.

En variant la position d'un seul point à la fois (F et D) par manipulation directe du modèle, ils pourront trouver une valeur minimum, qu'ils pourront minimiser à nouveau en agissant sur l'autre point. Quelques passages d'un point à l'autre seront nécessaires pour trouver la plus petite valeur que *GeoGebra* est en mesure de calculer. (Il est cependant inutile de calculer beaucoup de décimales car la réponse finale est un montant d'argent.)

Dans un essai partant de $x = 0$ et $y = 0$ et en déplaçant d'abord le point F et ensuite D alternativement, on est à moins de 0,59$ de la réponse finale après 7 ajustements de la sorte. Après 12, le coût en dollars et cents ne bouge plus et se stabilise à 33 215,56$ (voir figure 3). C'est la réponse finale sans algèbre et sans heuristique particulière, simplement en laissant « parler » le modèle.

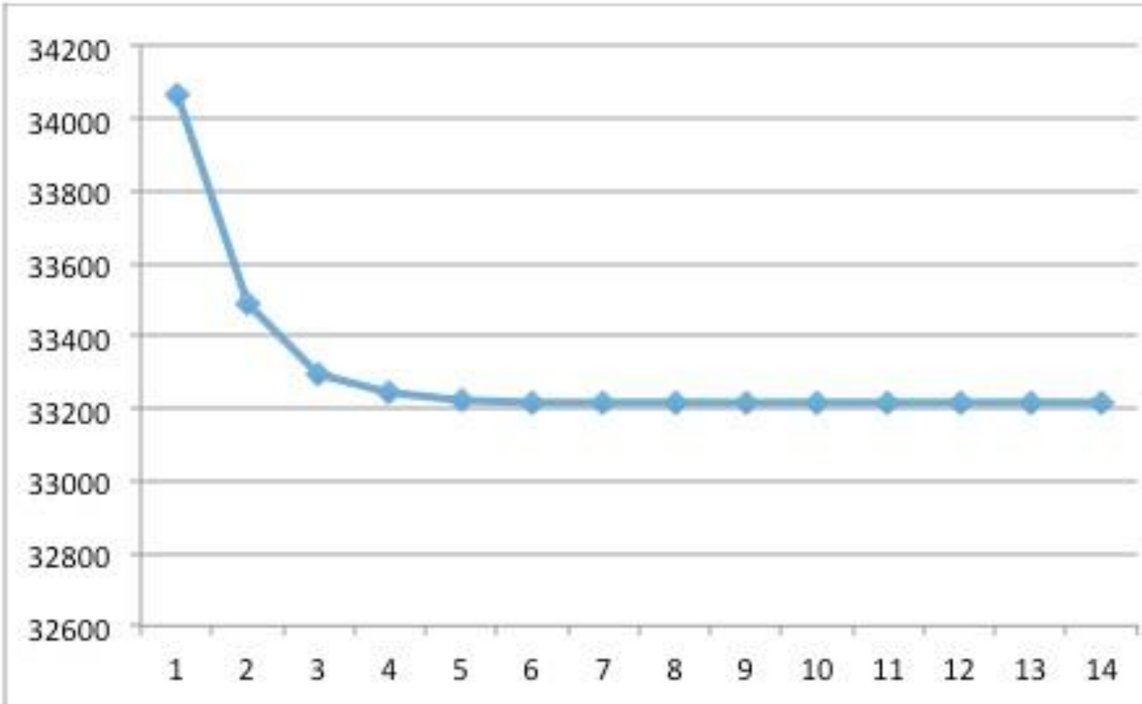


Figure 3: convergence vers une réponse en fonction du nombre de manipulations directes du modèle dans la situation problème

Les étudiants pourraient se demander pourquoi cet aller-retour a été nécessaire et en discuter, sinon la suggestion de ce questionnement pourrait venir du formateur. Une approche visuelle, en alternant les directions, semble utile pour en comprendre la raison. Mais serait-elle suffisante? On pourrait aller plus loin avec des étudiants de cégep et se demander si cette méthode demeurerait fiable en changeant des paramètres de la situation.

Une autre façon de procéder est de créer un plan $z = t$ où le paramètre t est manipulable par un curseur. Il s'agit de trouver la position du plan qui n'aura qu'un seul point comme intersection avec la surface exprimée par l'équation dont nous avons discuté au bloc 3 (voir figure 4 plus bas). Cela est difficilement atteignable car ça fait intervenir des algorithmes internes dont on ne peut modifier le niveau de précision que jusqu'à un certain point. Il faut aussi zoomer l'écran et modifier l'échelle de l'axe des cotes en z en divisant les valeurs par 1000. Tout cela fait intervenir d'autres rouages internes qui sont tributaires des choix des programmeurs. Le meilleur résultat que j'ai pu obtenir est à 3 chiffres significatifs, soit 33,200, soit 33200$. Il n'y a quand même qu'une différence de 15,56$, pas de quoi perdre son emploi!

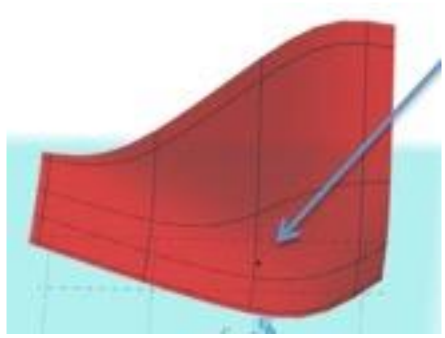


Figure 4: obtention manuelle du plan tangent horizontal à la surface qui représente la fonction à minimiser

Bloc 5 : Discussion finale en grand groupe (30 minutes)

De retour en groupe, on pourra partager les diverses stratégies et comparer les réponses s'il y a lieu, en discutant aussi des cas limites (voir à la fin du bloc 3 plus haut). Ceux qui ont utilisé l'approche algébrique ont peut-être cherché le plan horizontal qui touche au point le plus bas de la surface qui représente la fonction à deux variables, comme dans l'exemple illustré à la figure 4 ci-haut, ou ont tenté d'obtenir une réponse avec le module CAS (calcul symbolique) pour trouver ce minimum en se fiant aux fonctions programmées de *GeoGebra*.

Ceux qui ont utilisé l'approche par approximations successives ont peut-être tenté de faire tracer le lieu d'un point P de coordonnées (x, y, C(x,y)/1000) quand on fait varier alternativement *x* seulement et *y* seulement, mais on ne peut pas obtenir un lieu avec deux degrés de liberté (surface). Ça pourrait aider de faire tracer plusieurs lieux en créant des copies des points mobiles, mais c'est aussi une approche laborieuse et imprécise. Certains se demanderont peut-être si *Wolfram Alpha* et *Maple* pourraient faire cette représentation. On peut cependant arriver à une réponse précise en utilisant la fonction « Enregistrer dans tableur » et en se basant sur le nouveau minimum à chaque étape pour bouger l'autre point. Un autre moyen consiste à activer la trace du point P, avec l'axe des *z* vers le haut, et faire varier à loisir la position des deux points mobiles par animation, avec des incréments différents. On arrive à placer un plan tangent assez près de la trace bien que ce ne soit pas aussi précis.

Après avoir fait cet inventaire des démarches des équipes, une réponse théorique pourra être obtenue par l'enseignant par l'annulation des dérivées partielles pour la comparer avec ce que les étudiants réussissent à obtenir (voir figure 5 plus bas). Il pourra présenter cette approche à la fin en utilisant le module de calcul formel en précisant que cette approche n'est pas disponible au secondaire mais qu'on peut en acquérir une certaine compréhension visuelle. En effet, au point le plus bas d'une surface localement continue, toutes les droites tangentes passant par ce point appartiennent au plan tangent horizontal et ont donc une pente nulle dans le plan de tangence perpendiculaire contenant cette droite. Or la dérivée évaluée en un point (et dans une direction) équivaut à la pente de la tangente en ce point de la surface et dans cette direction.

Dérivée[p, x]=0

$$\to \frac{1}{1000}\left(-700\left(-x+5\sqrt{39}\right)\frac{-y+\sqrt{\left(-x+5\sqrt{39}\right)^2+625}}{\sqrt{\left(-x+5\sqrt{39}\right)^2+625}\sqrt{\left(-y+\sqrt{\left(-x+5\sqrt{39}\right)^2+625}\right)^2+900}}+300\right)=0$$

Dérivée[p, y]=0

$$\to \frac{1}{1000}\left(-700\cdot\frac{-y+\sqrt{\left(-x+5\sqrt{39}\right)^2+625}}{\sqrt{\left(-y+\sqrt{\left(-x+5\sqrt{39}\right)^2+625}\right)^2+900}}+400\right)=0$$

{$5, $6}

Résoudre: $\{\{x=2.8776545163,\ y=16.90712858624\}\}$

q(x, y):=MembreDroite[Elément[Elément[{{x = 2.8776545163, y = 16.90712858624}},1],1]]

$$\to q(x,y) := \frac{28776545163}{10000000000}$$

s(x, y):=MembreDroite[Elément[Elément[{{x = 2.8776545163, y = 16.90712858624}},1],2]]

$$\to s(x,y) := \frac{825543388}{48828125}$$

n(28776545163 / 10000000000,825543388 / 48828125)

$\approx$ 33215.56321487

Figure 5: résolution analytique brute avec les dérivées partielles

En effet, partout ailleurs qu'en un maximum ou un minimum d'une surface continue, il y aura des tangentes qui ne seront pas horizontales. Cela signifie que la pente de ces droites, donc la dérivée dans la direction considérée, ne sera pas nulle. Cette institutionnalisation sera l'occasion d'évaluer le degré de précision qu'il a été possible d'atteindre avec les approches heuristiques. Nous avons constaté en particulier que l'approche d'ajustement graduel des distances donnait une précision bien supérieure à ce que l'on attendait, soit la même valeur qu'avec les dérivées, en dollars et cents.

Bloc 6 : Travail individuel – une autoréflexion sur ce qui est retenu par chacun des futurs enseignants

Un document de réflexion sera remis aux étudiants pour consigner ce dont ils se souviennent par rapport au déroulement de l'activité et quelles conclusions ils en tirent pour un enseignement au secondaire dans un environnement où la technologie est disponible. Ce travail pourra être fait à la maison mais il est souhaitable de prendre quelques minutes de rappel silencieux après l'activité pour faciliter l'évocation ultérieure des apprentissages (Vianin, 2009).

Références

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 37-65. Repéré à https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf

Hitt, F. et González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (Collaborative learning, Scientific debate and Self-reflexion) method. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 201-219. Repéré à https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/bitstream/handle/1866/18322/Hitt-GonzalezMartin-2015-ESM-post.pdf?sequence=1

Hitt, Fernando. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. Dans M. Baron, D. Guin et L. Trouche (dir.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Paris: Hermès.

Saboya, M., Bednarz, N. et Hitt, F. (2015). Le contrôle exercé en algèbre: conceptualisation et analyses en résolution de problèmes. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *20*, 61-100.

Vianin, P. (2009). *L'aide stratégique aux élèves en difficulté scolaire: comment donner à l'élève les clés de sa réussite*. Bruxelles: De Boeck Supérieur.

Voir le document à distribuer aux étudiants/futurs enseignants (page suivante).

Activité : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble

Nom:____ Groupe:________ Date: _______

Membres de l'équipe:

INSTRUCTIONS

Réfléchis à la situation problème soumise d'abord de façon individuelle, puis en équipe.

Indique toujours tes réflexions sur tes feuilles de travail, même quand tu travailles en équipe.

Vous devez porter une double lunette, soit celle sur votre engagement dans la tâche en tant qu'étudiant universitaire et aussi en tant que futur enseignant au secondaire qui anticipe ce que ses élèves pourraient tenter.

SITUATION INITIALE

1. On veut relier un câble électrique d'un point C à la surface d'un terrain à un relais B situé sous terre. Cependant, le relier en ligne droite supposerait de l'enfouir entièrement sous terre; or le coût pour un câble enfoui est supérieur à une même longueur de câble installée en surface. On pourrait aussi l'amener en A, à la verticale de la cible B et creuser ensuite vers le bas jusqu'à B. Mais ce n'est pas non plus la solution la plus économique car la longueur de câble est alors maximale, ce qui vient faire perdre l'avantage de l'économie gagnée en surface. Le problème est donc de trouver la configuration la plus économique, en fonction de la position du point D sur le chemin de C à A où on débutera à creuser en ligne droite vers B, et des coûts respectivement en surface et sous terre de l'acheminement du câble.

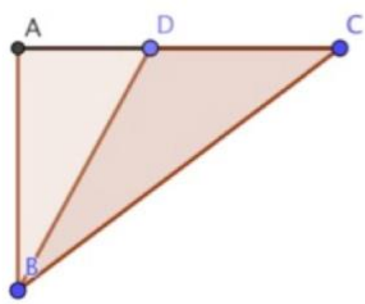


Figure 1 : représentation de la situation initiale

SITUATION PROBLÈME

2. Si l'on suit une route existante, le tracé en surface coûtera encore moins cher car les véhicules y auront facilement accès. Alors comment exploiter cette information pour minimiser les coûts?

Dans tous les cas, on pourrait considérer que la distance de C à B est de 50 mètres et que le point B se situe à 30 mètres de profondeur. On suppose aussi que le terrain est plat. On considère les coûts de l'installation sous terre à 700$ le mètre, alors qu'en surface, c'est plutôt 400$ le mètre, sauf si on suit une route. Dans ce cas le coût est de 300$ le mètre.

GÉNÉRALISATION DU MODÈLE (EN DEVOIR)

Étudier la variation de la solution si l'on considère les valeurs que l'on vient d'indiquer comme des paramètres modifiables. Doit-on tout recommencer le travail si certaines de ces données diffèrent (changement de coût, du point de départ, etc.)? Le modèle permet-il de répondre à la question dans le cas général?

Bloc 1 (Individuel, 15 minutes)

1. Quelle stratégie utiliserais-tu pour avoir une vision claire du problème et de ce qui est demandé? À quel niveau scolaire crois-tu que cette stratégie serait accessible?

2. Réalise un schéma qui représente la situation en indiquant clairement tous les éléments connus.

3. Que faudrait-il déterminer pour pouvoir progresser vers la solution? Quelles sont les méthodes possibles pour déterminer ces éléments? À quel niveau scolaire chacune de ces méthodes est-elle accessible?

Bloc 2 (Équipes, 20 minutes)

4. Comparez vos réponses en 1., 2. et 3. au bloc 1. Avez-vous un portrait clair de la situation? Pouvez-vous énoncer explicitement le but visé?

5. Entendez-vous sur un plan d'attaque pour faire avancer la résolution du problème en précisant ce que la géométrie et l'algèbre peuvent apporter respectivement (à vous et aussi

à vos élèves). Allez-vous privilégier une approche papier-crayon-calculatrice ou un usage plus particulier de la technologie?

Bloc 3 (Grand groupe, 20 minutes)

Chaque équipe présente sa conception du problème et le cheminement envisagé pour s'approcher de la solution. Notez les idées intéressantes.

Bloc 4 (Équipes, 50 minutes)

6. Réalisez votre plan d'action et indiquez tout changement à vos intentions initiales et ce qui les a occasionnés.

Bloc 5 (Grand groupe, 30 minutes)

7. Chaque groupe présente ses résultats et on débat ensuite sur la validité des démarches et des résultats. Notez les idées intéressantes. L'enseignant en profite pour relier les idées présentées aux savoirs institutionnel.

Bloc 6 (Individuel, 45 minutes) auto-réflexion

RAPPEL DE L'ACTIVITÉ D'OPTIMISATION DU PRIX DE L'INSTALLATION DU CÂBLE

VOTRE NOM: ____

Repassez en revue les étapes qui ont été nécessaires à l'approche que vous avez privilégiée. Quel savoirs avez-vous mobilisés? Comment avez-vous gardé un contrôle sur votre activité mathématique? Que retenez-vous par rapport à l'usage de la technologie?

Activité pour les futurs enseignants de mathématiques : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble

Capítulo 3: Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones

Actividades didácticas

José Luis Soto Munguía, Manuel Alfredo Urrea Bernal, César Fabián Romero Félix. [1]

Introducción

El propósito de las actividades siguientes, es que podamos parametrizar las superficies que limitan un volumen como el que se muestra en la Figura 1. Como puede observarse en esta figura, el volumen está limitado por cinco superficies, de las cuales tres son planas (las que están sobre los planos coordenados) y dos son no planas.

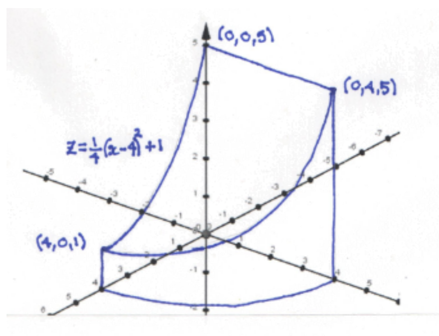


Figura 1

Antes de introducirnos a las especificaciones técnicas, en esta primera parte trataremos de familiarizarnos con las ideas geométricas que están detrás de la parametrización.

La primera idea es que podamos parametrizar un segmento (por ejemplo vertical) con un extremo sobre alguno de los ejes coordendos, como el que se muestra en la Figura 2.

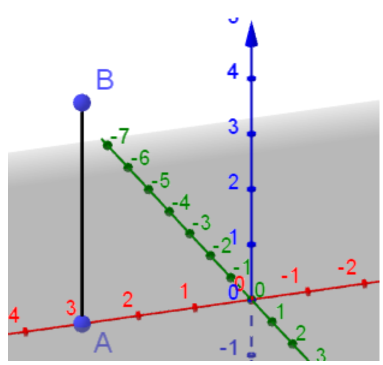


Figura 2. Segmento vertical con un extremo sobre el eje x

[1] Universidad de Sonora, México

Secuencia 1

Actividad 1.

a) Abra el archivo Graf_1, en la vista 3D podrá ver una gráfica como la que se muestra en la Figura 3. Active el "Rastro" del segmento AB y arrastre el punto A entre $x = 0$ y $x = 4$. Describa la figura que ha generado el segmento AB.

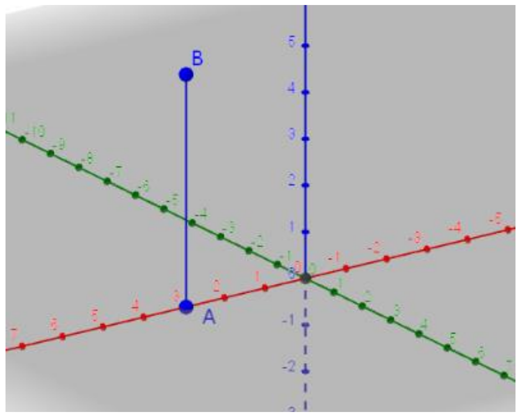


Figura 3

b) Abra ahora el archivo Graf_2 (Figura 4) y haga lo mismo que en la actividad anterior, es decir con el "rastro" del segmento activado, arrastre el punto C entre $x = 0$ y $x = 4$. ¿Qué figura ha obtenido ahora? Explique por qué la figura que acaba de obtener no es la misma que la obtenida en el inciso anterior.

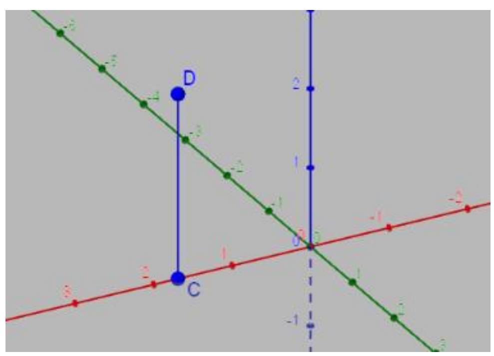


Figura 4.

Actividad 2.

La superficie que ha graficado está en el plano XZ y puede interpretarse como la proyección sobre el plano XZ de la figura no plana que se muestra parcialmente en la Figura 5 y que ha sido generada por otro segmento como el CD, pero que se mueve ahora sobre una curva, que en este caso es un cuarto de circunferencia.

Abra el archivo Graf_3 y arrastre el punto A, para mover los segmentos AB y CD.

a) ¿Cómo están relacionados los segmentos AB y CD?
b) ¿Qué superficie trazan cada uno de estos segmentos al arrastrarlos?

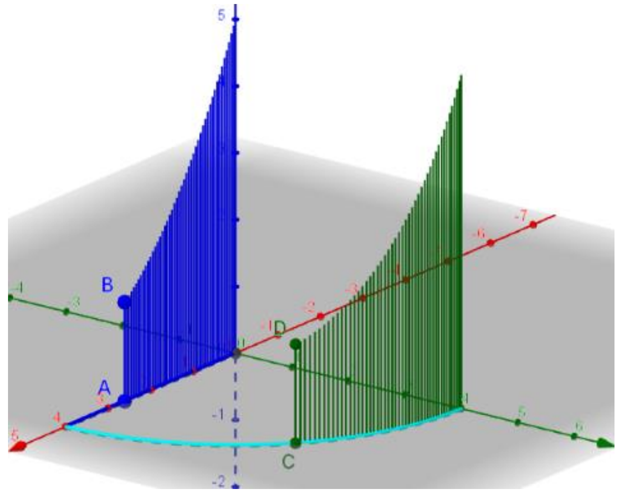


Figura 5

Actividad 3.

Al igual que se hizo con las dos superficies anteriores, la superficie sobre el plano XY (que tiene forma de un cuarto de círculo) puede ser graficada como el lugar geométrico trazado por un segmento variable y luego tomar este mismo segmento como la proyección de otro que recorre la curva definida por la función $f(x) = \frac{1}{4}(x-4)^2 + 1$ (ver la función de la Figura 1).

Abra el archivo Graf_4 y use el punto A para arrastrar los segmento AC y BD.

a) ¿Cómo están relacionados los segmentos AC y BD?
b) ¿Qué superficie trazan cada uno de estos segmentos al arrastrar el punto A?

Actividad 4.

Construya en GeoGebra 3D un segmento sobre el plano YZ que permita trazar la superficie que falta para cerrar el volumen. Llame a su archivo Graf_5 y envíelo por correo electrónico al profesor.

Secuencia 2

Las ideas gráficas discutidas en la Secuencia 1 pretenden dejar claro que la posiblididad de trazar las superficies que nos interesan, depende en gran parte de la graficación de un segmento en 3D, que podamos mover apropiadamente.

En lo que se ha discutido hasta ahora, las superficies han sido trazadas activando el "rastro" de un segmento, lo que genera un trazo que en GeoGebra no es estable, es decir se puede borrar al menor descuido.

Por esta razón, en las actividades siguientes centraremos nuestra atención en utilizar las herramientas para graficar las versiones parametrizadas de un segmento y una superficie, como gráficas estables automatizadas por GeoGebra.

Actividad 1.

Grafique en GeoGebra 3D los puntos $A = (4,0,0)$ y $B = (4,0,5)$

a) Grafique ahora el vector $u = (0,0,5)$, ¿qué relación existe entre el vector u y los puntos A y B?
b) Capture en la Barra de Entrada de GeoGebra el vector ku y luego el punto $P = ku$, para asignar al vector ku su punto extremo P.
c) ¿Cuál será el lugar geométrico determinado por el punto P (extremo del vector ku), cuando k varía entre 0 y 1?
d) Si tiene problemas para visualizar el lugar geométrico solicitado, trace un Deslizador k $(0 \leq k \leq 1)$ y solicite a GeoGebra el Lugar Geométrico del punto P, cuando k varía.
e) ¿Qué relación existe entre el lugar geométrico determinado por el vector ku al hacer variar k entre 0 y 1 y el segmento AB?
f) Trace ahora el vector $v = (4,0,0)$ y luego el vector $v + ku$.
g) Al igual que antes, capture en GeoGebra el punto $Q = v + ku$, para asignar al vector $v + ku$ su punto extremo Q.
h) ¿Cuál es el lugar geométrico del punto Q (extremo del vector $v + ku$), cuando se hace variar k?
i) Grabe su archivo de GeoGebra con el nombre Param1.ggb

Actividad 2.

Ahora le daremos instrucciones a GeoGebra para que grafique el lugar geométrico de la actividad anterior, pero de manera automática.

a) Sean los vectores $X = (x, y, z)$ todos los vectores del lugar geométrico trazado, es decir

$$X = (x, y, z) = v + ku = (4,0,0) + k(0,,0,5)$$

Utilice la ecuación anterior, para expresar las coordenadas x, y y z, en términos de k. Las tres ecuaciones obtenidas se conocen como las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico.

b) GeoGebra puede graficar directamente el lugar geométrico anterior, capturando estas ecuaciones en el comando "Curva", para curvas en 3D de la Barra de Entrada (Figura 6). Capture las ecuaciones paramétricas y verifique que la curva trazada con este comando, coincide con la gráfica del lugar geométrico determinado por $v + ku$ (más exactamente por su punto extremo Q), $0 \leq k \leq 1$. Obsérvese que las ecuaciones paramétricas dependen de un solo parámetro, mismo que es solicitado por el comando "Curva" de GeoGebra.

Entrada: **Curva(<Expresión>, <Expresión>, <Parámetro>, <Valor inicial>, <Valor final>)**

Figura 6

Actividad 3.

En la actividad anterior, se ha trazado un segmento vertical con el extremo inferior sobre el Eje X. Como se ha visto antes, el movimiento de este segmento puede generar una superficie plana. La expresión algebraica del segmento mencionado era la siguiente para $0 \leq k \leq 1$.

$$X = (x, y, z) = v + ku = (4,0,0) + k(0,0,5) = (4,0,5k)$$

Obsérvese que cuando el parámetro k varía entre 0 y 1, la única coordenada de X que cambia es la coordenada en z, puesto que el vector $v = (4,0,0)$ de la suma, está fijo.

Si queremos que el segmento AB se mueva para generar una superficie, tendremos que sustituir el vector v por un vector que se mueva a lo largo del eje x, por ejemplo por el vector mv, que podemos hacer variar, haciendo variar el parámetro m.

a) Considere ahora el conjunto de vectores M, tales que:
$M = (x, y, z) = mv + ku = m(4,0,0) + k(0,0,5) = (4m, 0,5k)$, con $0 \leq m \leq 1$ y $0 \leq k \leq 1$

Use la igualdad anterior para expresar cada una de las variables x, y y z en términos de m y k. A las tres ecuaciones obtenidas se les conoce como las ecuaciones paramétricas de la superficie generada.

Capture estas ecuaciones en el comando Superficie, que puede encontrar en la barra de entrada de GeoGebra. En la Figura 7 puede verse este comando, que le pedirá además que especifique los parámetros m y k y el rango de variación de estos parámetros.

Describa la superficie que GeoGebra ha graficado.

Entrada: **Superficie(<Expresión>, <Expresión>, <Expresión>, <Parámetro 1>, <Valor inicial>, <Valor final>, <Parámetro 2>, <Valor inicial>, <Valor final>)**

Figura 7

b) En la superficie:

$$M = (x, y, z) = mv + ku = m(4,0,0) + k(0,0,5) = (4m, 0,5k), \text{ con } 0 \leq m \leq 1 \text{ y } 0 \leq k \leq 1$$

Cambie el rango de variación $0 \leq m \leq 1$ de m, por $1 \leq m \leq 2$. ¿Qué cambio se produjo en la superficie graficada en el inciso a)? Explique a qué se debe este cambio.

c) A veces conviene usar vectores unitarios sobre los ejes de coordendas, en lugar de los vectores u y v; pero si queremos parametrizar la misma superficie, tendremos que cambiar los rangos de variación de los parámetros.

Verifique por ejemplo, que la superficie anterior:

$$M = (x, y, z) = mv + ku = m(4,0,0) + k(0,0,5) = (4m, 0{,}5k), \text{ con } 0 \leq m \leq 1 \text{ y } 0 \leq k \leq 1$$

coincide con la superficie:

$$M = (x, y, z) = mv + ku = m(1,0,0) + k(0,0,1) = (m, 0, k), \text{ con } 0 \leq m \leq 4 \text{ y } 0 \leq k \leq 5$$

EJERCICIO. Parametrizar la superficie plana de la Figura 1, que está sobre el plano YZ.

Actividad 4.

Como podrá verse en la gráfica construida en la actividad anterior, el segmento deslizado sobre el eje x, mantiene su magnitud constante e igual a 5. Si queremos parametrizar una superficie como la que muestra la Figura 1, sobre el plano XZ, tendremos que hacer variar el extremo superior del segmento AB, de acuerdo con la función $z(x) = \frac{1}{4}(x-4)^2 + 1$.

Como el punto A del segmento (sobre el eje x), tendrá coordenadas $mv = m(1,0,0) = (m, 0,0)$, para cada vector $(m, 0,0)$ con $0 \leq m \leq 4$, la función z tomará el valor $z(m) = \frac{1}{4}(m-4)^2 + 1$, entonces al vector mv habrá que sumar el vector ku, donde el vector u estará definido para cada m, como $u = (0,0, z(m))$, tendremos entonces que $ku = k(0,0, z(m))$ con $0 \leq k \leq 1$. Se obtendrá así la ecuación vectorial:

$$M = (x, y, z) = mv + ku = m(1,0,0) + k(0,0, z(m)) = (m, 0, kz(m),$$

$$\text{donde } 0 \leq m \leq 4\,, 0 \leq k \leq 1 \text{ y } z(m) = \frac{1}{4}(x-4)^2 + 1$$

En la Figura 8, puede verse cómo se ha construido el segmento AB, que al desplazarse sobre el eje x, trazará la superficie bajo la curva.

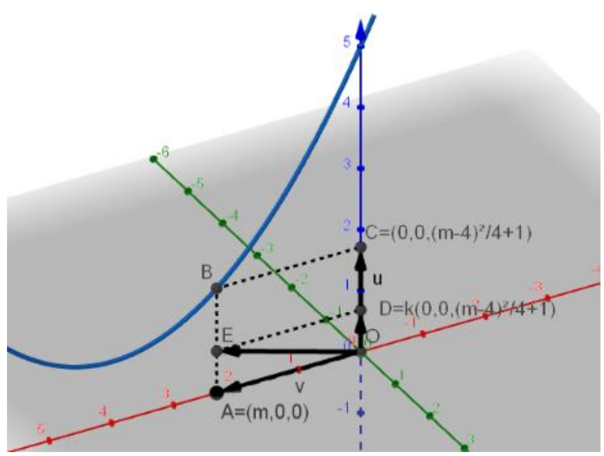


Figura 8

EJERCICIO. Parametrice en el plano XZ, la superficie bajo la curva $z = \text{sen}(x)$, para $0 \leq x \leq 2$

EJERCICIO. Parametrice en el plano YZ, la superficie bajo la curva $z = 3\sqrt{1 - \frac{y^2}{25}}$, para $0 \leq y \leq 3$

Actividad 5.

Como se ha visto en la actividad anterior, el segmento AB que genera la superficie plana, se está desplazando sobre el eje x “dejando rastro”, es decir generando para cada m_0 fija, todos los puntos del segmento que se traza al hacer variar k entre 0 y 1, y que son los puntos de coordendas $(m_0, 0, k(\frac{1}{4}(m_0 - 4)^2 + 1)$ para $0 \leq k \leq 1$.

Si ahora queremos un segmento PQ que se desplace sobre el arco de circunferencia trazado en la Figura 1, es decir sobre la curva $\{x^2 + y^2 = 16, x \geq 0, y \geq 0, z = 0\}$; entonces el segmento PQ puede obtenerse trasladando el segmento AB, según el vector $(0, \sqrt{16 - m^2}, 0)$. Tendremos así que para cada m, se habrá generado el segmento PQ y al variar la m, este segmento se desplazará sobre el arco ya mencionado, los puntos (x, y, z) de la nueva superficie, tendrán entonces la forma:

$$(x, y, z) = \left(m, 0, k(\frac{1}{4}(m-4)^2 + 1)\right) + \left(0, \sqrt{16 - m^2}, 0\right)$$

$$= \left(m, \sqrt{16 - m^2}, k\left(\tfrac{1}{4}(m-4)^2 + 1\right)\right) \qquad (1)$$

En la Figura 9 puede observarse que para cada valor de m, se tiene un segmento PQ que se traza cuando la k varía entre 0 y 1. Y cuando m varía entre 0 y 4, se traza la superficie que queremos.

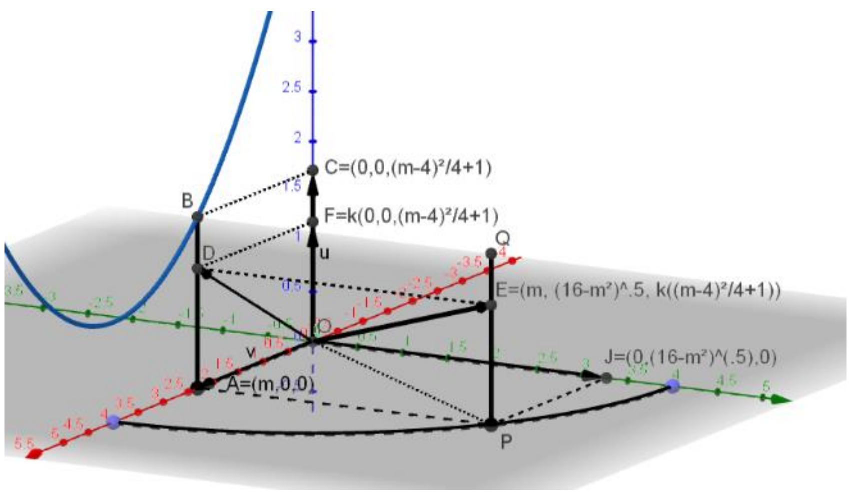


Figura 9

Actividad 6.

a) A partir de la ecuación (1) de la actividad anterior, exprese las variables (x, y, z) en términos de m y k.

$$x =$$
$$y =$$
$$z =$$

b) En la barra de entrada de GeoGebra, capture estas expresiones y especifique los rangos de variación de los parámetros m y k. En la vista 3D, debiera mostrarse una gráfica como la que puede verse en la Figura 10.

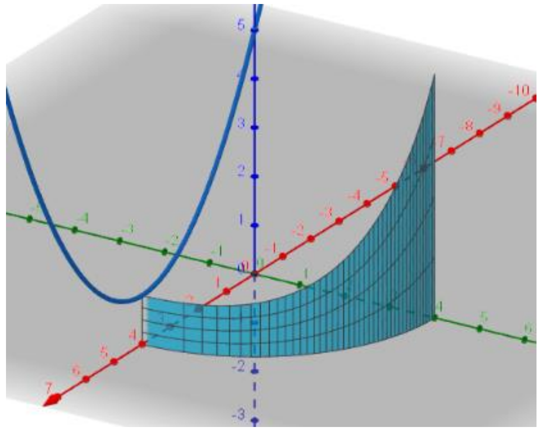


Figura 10

EJERCICIO. La superficie anterior ha sido "montada" sobre la curva $\{x^2 + y^2 = 16, x \geq 0, y \geq 0, z = 0\}$, parametrice la superficie "montada" sobre la curva $\{x + y = 4, x \geq 0, y \geq 0, z = 0\}$.

¿Qué cambios tendría que hacer en la ecuación (1) para obtener esta superficie?

Actividad 7.

En esta actividad parametrizaremos las dos superficies que pueden verse en la Figura 11. De nueva cuenta, se considerará el "fondo" del volumen como la proyección sobre el plano XY de la "tapa" del volumen.

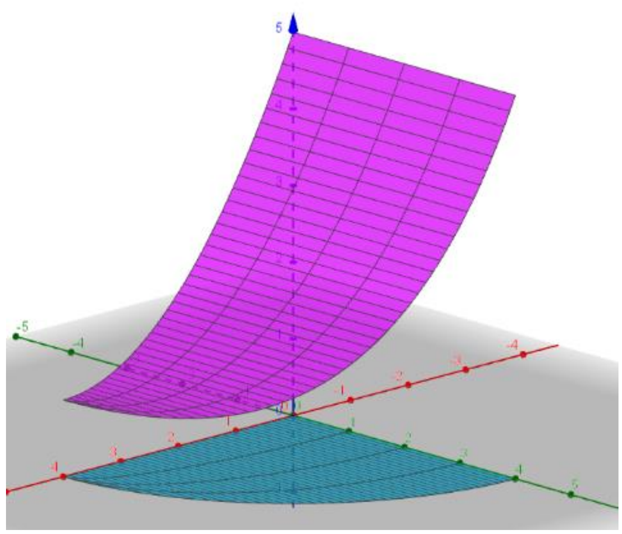


Figura 11

a) En la Figura 12, puede verse cómo se ha parametrizado el "fondo" del volumen.

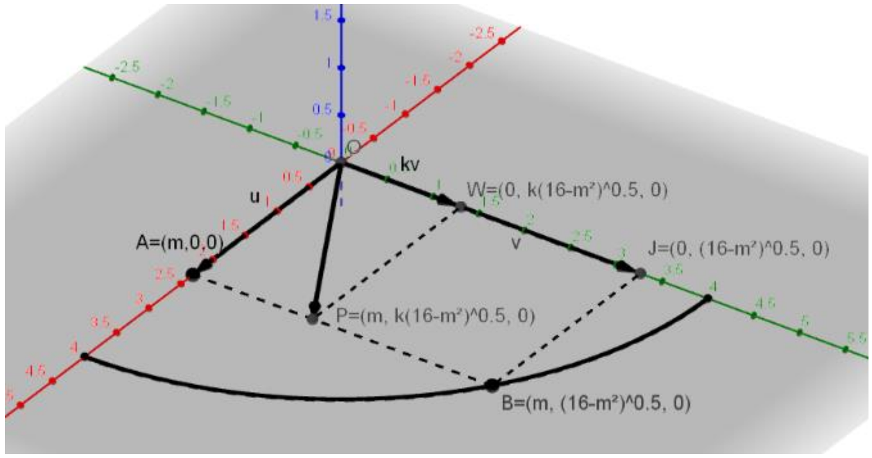


Figura 12

El segmento AB es trazado por la suma $u + kv$ al hacer variar k entre 0 y 1. Y cuando m varía entre 0 y 4 se trazan todos los segmentos que "llenan" el cuarto de circunferencia.

Use las coordenada del punto P para encontrar las ecuaciones paramétricas de la superficie a parametrizar, captúrelas en la barra de entrada usando el comando mostrado en la Figura 7 y verifique que se trata del cuarto de circunferencia de la Figura 11.

b) En la Figura 13, puede verse cómo se ha parametrizado la "tapa" del volumen.

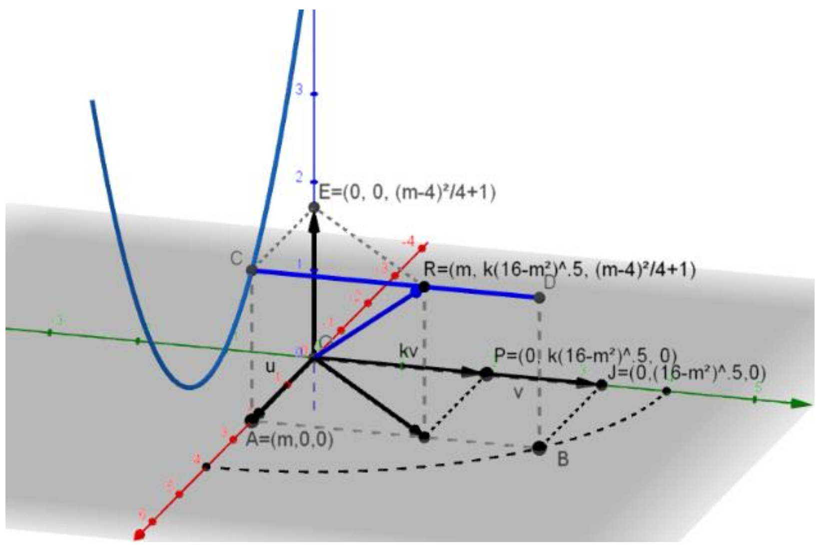


Figura 13

El segmento AB es trazado por la suma $u + kv$ al hacer variar k entre 0 y 1. Y cuando m varía entre 0 y 4 se generan todos los segmentos que trazan el "techo" del volumen.

Use las coordenadas del punto R para encontrar las ecuaciones paramétricas de la superficie a parametrizar, captúrelas en la barra de entrada usando el comando mostrado en la Figura 7 y verifique que se trata de la superficie superior mostrada en la Figura 13.

EJERCICIO

Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones

Parametrice las superficies que cubren el sólido mostado en la Figura 14.

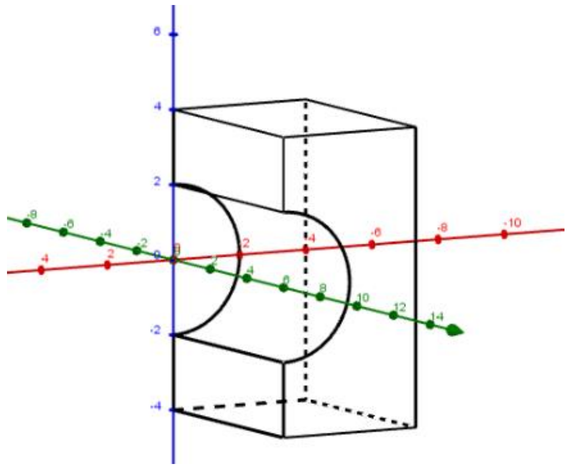


Figura 14

Secuencia 3

En la parametrización de una superficie no plana hay dos elementos claves, el primero es la indentificación de la superficie plana que resulta de proyectar la superficie sobre algunos de los planos coordenados, la segunda es la determinación de la función o funciones que delimitan la superficie plana identificada como proyección. Estas funciones no siempre están dadas y con frecuencia tendremos que conformarnos con una aproximación a la función que limita la superficie requerida.

En esta secuencia aprenderemos a parametrizar un objeto físico, para ello tomaremos como ejemplo un fragmento de riel ferroviario, como el que se muestra en la Figura 15a. Usaremos para ello las dimensiones de la sección del riel, que se muestra en la Figura 15b.

Figura 15ª

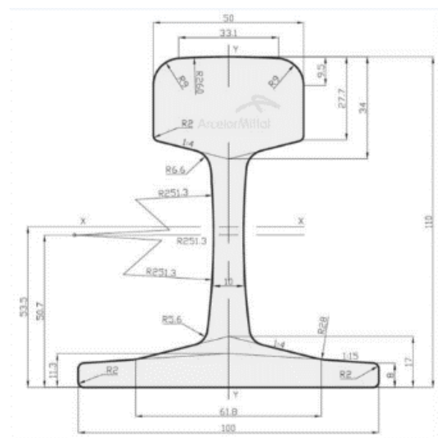


Figura 15b

Primero pegaremos la sección del riel en la vista gráfica de GeoGebra y la colocaremos como más convenga. Como la idea es que los contornos del riel puedan aproximarse ajustando puntos sobre el contorno con gráficas de funciones, rotaremos la sección y la pegaremos tratando de aprovechar los ejes de simetría de la sección, por ejemplo como se ve en la Figura 16.

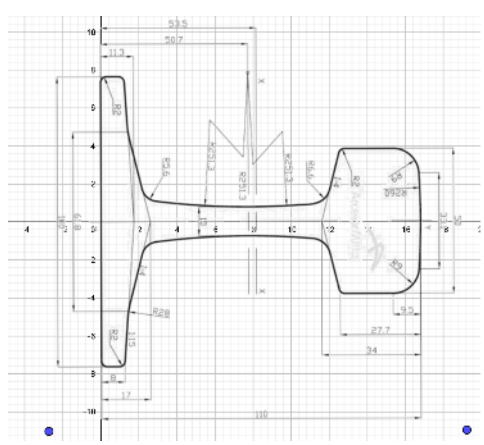


Figura 16

Hecho lo anterior podemos trazar algunos puntos sobre el contorno de la figura y luego usar, por ejemplo, el comando “AjustePolinómico” para ir aproximando el contorno. En la Figura 17 se muestra el comando de GeoGebra que se usará.

Figura 17

En la Figura 18, se han trazado cinco puntos sobre el contorno de la sección del riel. Los puntos C,D y E han sido ajustados con una función cuadrática f y los puntos E, F y G con otra cuadrática g.

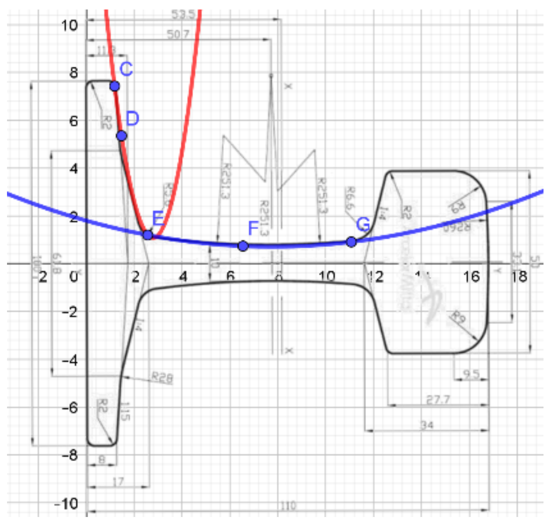


Figura 18

Con ellos parametrizaremos la superficie bajo las curvas, desde la abscisa de C, hasta la abscisa de G, en dos partes. Las superficies parametrizadas quedarán como sigue:

$M = (x, y, z) = (m, 0,0) + k(0, f(m), 0) = (m, kf(m), 0);\ 1.18 \leq m \leq 2.56;\ -1 \leq k \leq 1$

$N = (x, y, z) = (m, 0,0) + k(0, g(m), 0) = (m, kg(m), 0);\ 2.56 \leq m \leq 11.57;\ -1 \leq k \leq 1$

Obsérvese que el parámetro k se hizo variar entre -1 y 1, para que la superficie parametrizada incluya la superficie que está por debajo del eje x. Como puede verse en la Figura 19, la superficie se ha graficado en 3D, pero en el plano XY. Para cambiar la superficie de plano coordenado es suficiente con intercambiar apropiadamente las coordenadas de la parametrización como se ve en la Figura 20.

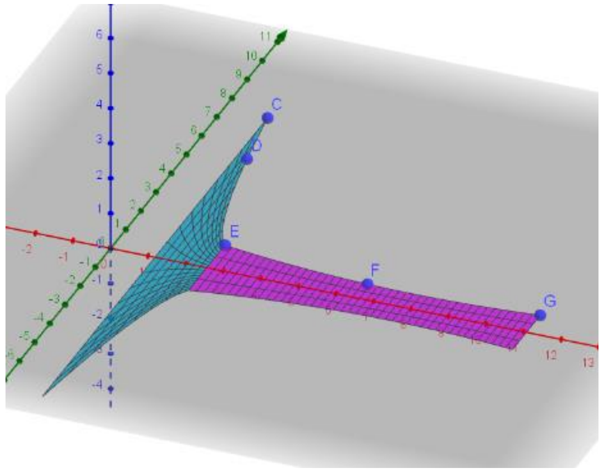


Figura 19

La Figura 20 muestra el aspecto de la superficie en el plano XZ, después de un intercambio de coordenadas de la parametrización.

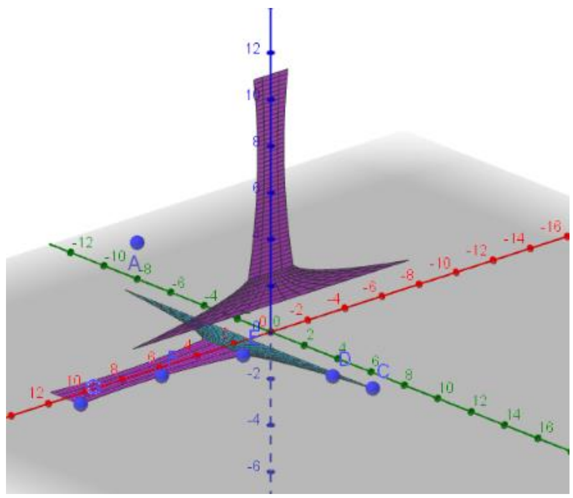


Figura 20.

Actividad 1.

Complete la aproximación de los contornos del riel ferroviario y parametrice todas las superficies que cubren el sólido.

Actividad 2.

a) Seleccione un objeto físico para parametrizar las superficies que lo cubren.
b) Tome fotografías del objeto que puedan ser interpretados como proyecciones sobre los planos coordenados.
c) Pegue la o las fotografías en la vista gráfica de GeoGebra y parametrícelas.
d) Parametrice las superficies que cubren el cuerpo completo.
e) El objeto a parametrizar también podría ser tomado de fotografías o imágenes de Internet.

Capítulo 4: Horas de luz solar

Actividad didáctica

Cesar Martínez Hernández[1], María del Carmen Olvera Martínez[2].

Problemática y propósitos de aprendizaje

Que los estudiantes generen un modelo matemático de un contexto real sobre la duración de luz solar con datos que se pueden recuperar en una base que se actualizan en tiempo real. El contexto propuesto es propicio para promover el estudio de fenómenos reales que involucra periodicidad, por lo que la actividad promueve el estudio de la función seno y/o coseno a través de diferentes representaciones.

Conceptos matemáticos involucrados

Generales: representaciones numérica, gráfica y algebraica de una función; variación; visualización, continuidad-discontinuidad.

Específicos: graficación de funciones, función seno y/o coseno (amplitud, periodo, desfase, desplazamiento vertical).

Nivel de estudios

Formación de profesores de secundaria y/o bachillerato.

Total de sesiones y duración aproximada

Dos sesiones (una para la primera parte de la actividad; otra para la segunda) de 1.5 horas cada una.

Materiales necesarios

- Hojas de trabajo
- Una computadora con GeoGebra por estudiantes (o equipo, de ser el caso)
- Acceso a Internet
- Proyector (para utilizar en discusiones grupales)
- Hojas de papel
- Pintarrón/pizarrón
- Plumones

Método o recomendaciones de enseñanza

El rediseño de la actividad, por un lado, está basado en los seis principios de las Actividades Provocadoras de Modelos (Lesh & Doerr, 2003); y, por otro, la actividad está estructurada

[1] Universidad de Colima, México (†).
[2] Universidad Juárez del Estado de Durango, México

siguiendo los episodios de resolución de problemas con el uso de tecnologías digitales (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013).

En este sentido, la actividad está planteada en cuatro momentos con base en los episodios de resolución de problemas, como a continuación se indica:

Primero momento (cuatro preguntas). Este momento está relacionado con el episodio de comprensión del problema, el cual implica dar sentido a la información dada en la situación, identificar conceptos relevantes, representaciones útiles y el sentido de uso de la tecnología. En este momento de la actividad, se plantean datos referentes a la luz solar de determinado día correspondientes a cuatro meses, obtenidos de www.sunrise-and-sunset.com, para ser graficados mediante GeoGebra, y así comenzar una discusión sobre el tipo de función que pueden representar los datos graficados. Al final de cada momento, se recomienda una discusion grupal de las respuestas de cada participante.

Segundo momento (seis preguntas). Este momento está relacionado con el episodio de exploración, en el cual se espera que el uso de GeoGebra brinde oportunidades al usuario para examinar la situación planteada. Es decir, con el uso de GeoGebra se debe promover la exploración de un modelo a través de acercamientos empíricos (e.g., mediante el uso de deslizadores). Son seis la preguntas que corresponden a este momento, éste refiere a la consulta de información de la página www.sunrise-and-sunset.com, para que el usuario grafique los datos de las horas de luz solar correpondientes al día 21 de los doce meses, a partir de los cuales se promueve un refinamiento del modelo inicial propuesto en el primer momento.

Tercer momento (dos preguntas). Éste se relaciona con la búsqueda de múltiples acercamientos hacia la solución del problema, es decir, en este momento se busca que el usuario, a partir de sus primeros acercamientos empíricos (utilizando la capacidad gráfica de GeoGebra) y las conjeturas que logre formular, intente resolver el problema usando otros acercamientos y formas de argumentar, por ejemplo, el algebraico. Para ello, el alumno debe disponer de acceso a información (en Internet) sobre el tipo de función (modelo) que propone. Así, en este momento, se propone al estudiante la construcción de un nuevo modelo para datos distintos a los analizados en la primeras dos fases, pero para una situación similar, con el objetivo de promover en el alumno la búsqueda de un modelo similar, o bien, otro distinto al de las primeras fases, empleando diferentes recursos y estrategias que los lleven a desarrollar otros acercamientos, además del empírico.

Cuarto momento (cinco preguntas). De acuerdo con los episodios de resolución de problemas, este momento corresponde a la Integración. Es decir, en éste se debe promover una reflexión sobre los procesos involucrados en los episodios previos. Involucra también, el planteamiento de nuevos problemas o una extensión de la situación planteada. En el caso de la formación de profesores, se sugiere que la extensión del problema sea un cuestionamiento relacionado con una reflexión sobre su posible práctica docente, respecto a un escenario de enseñanza con sus propios alumnos, sobre la actividad planteada. Las cinco preguntas de este momento, promueven una reflexión del proceso seguido en la construcción de los modelos que representan las situaciones planteadas en la actividad.

Referencias

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and Modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 35-58). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast*, *10* (1), 279-302.

Actividad (primera parte): Horas de luz solar

Nombre(s):____ Fecha: ____________

Nivel en que imparte clases:______________________ Años de experiencia docente: ________________

Formación inicial: ________________________________

INSTRUCCIONES

Lee con atención la situación propuesta. Contesta las preguntas y realiza lo que se solicita.

Registra siempre tus respuestas en las hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Primer momento

En el año 2015, en la ciudad de Monterrey, el día más largo ocurrió el 21 el junio (con trece horas cuarenta y dos minutos de luz solar) y el día más corto fue el 21 de diciembre (con diez horas y treinta minutos de luz solar). Los equinoccios, suceden el 21 de marzo y el 21 de septiembre, en los que el día y la noche son aproximadamente iguales a 12 horas.

En la siguiente tabla se registraron los datos anteriores de las horas de luz solar que hubo en el día 21 de cada mes en la ciudad de Monterrey.

Tabla 1 . Horas de luz solar en el año 2015 en la ciudad de Monterrey, México.

Mes	Horas de luz solar
Enero	
Febrero	
Marzo	12.10
Abril	
Mayo	
Junio	13.77
Julio	
Agosto	
Septiembre	12.10
Octubre	
Noviembre	
Diciembre	10.5

1. Con ayuda de GeoGebra, grafica los datos registrados en la Tabla 1.

2. ¿Qué tipo de función crees que representan los puntos graficados? ¿Por qué?

3. Escribe la función que crees que representan esos puntos.

4. ¿Cuál crees que sea el comportamiento de los 21 de cada mes del año 2016?

Discusión grupal (con base en las respuestas de los estudiantes y GeoGebra, se sugiere una discusión grupal de las respuestas de los participantes)

Segundo momento

5. Con ayuda de los datos que se proporcionan en la página www.sunrise-and-sunset.com completa la Tabla 1 y grafica en GeoGebra los nuevos datos obtenidos.

6. Con base en la gráfica que obtienes, ¿mantienes tu propuesta a la pregunta 3? ¿Por qué?

7. En caso de que tu respuesta haya cambiado, ¿cuál es el tipo de función que representan los puntos de la última gráfica?

8. En GeoGebra, grafica la función que propones y asigna un deslizador a cada uno de sus parámetros.

9. Varía los valores de los deslizadores hasta encontrar la gráfica que pase por todos los puntos. ¿Qué valores obtuviste para cada parámetro?

10. En la función que propones, utilizando GeoGebra y el uso de los deslizadores, ¿qué sucede en la gráfica cuando se mueve cada uno de los deslizadores?

Discusión grupal (con base en las respuestas de los estudiantes y GeoGebra, se sugiere una discusión grupal de las respuestas de los participantes)

Actividad (segunda parte): Horas de luz solar

Nombre(s):____ Fecha: __________

Nivel en que imparte clases:____________________ Años de experiencia docente: _______________

Formación inicial: ______________________________

INSTRUCCIONES

Las siguientes preguntas, son continuación de las 10 primeras de la actividad “Horas de luz solar”. Lee con atención la situación propuesta y contesta las preguntas; realiza lo que se solicita. Registra siempre tus respuestas en las hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Tercer momento

11. En la Tabla 2 se muestran las horas de luz solar que hubo en el día 21 de cada mes del año 2015 en la Ciudad de Buenos Aires, Argentina.

Tabla 2. Horas de luz solar en el año 2015 en la ciudad de Buenos Aires, Argentina.

Mes	Horas de luz solar
Enero	14.03
Febrero	13.06
Marzo	12.06
Abril	10.98
Mayo	10.15
Junio	9.8
Julio	10.13
Agosto	10.96
Septiembre	12.03
Octubre	13.1
Noviembre	14.03
Diciembre	14.43

12. Encuentra la función que representa los datos de la Tabla 2.

Discusión grupal (con base en las respuestas de los estudiantes y GeoGebra, se sugiere una discusión grupal de las respuestas de los participantes)

Cuarto momento

13. Describe el proceso que seguiste para encontrar la función.

14. Grafica en GeoGebra la función que encontraste en la pregunta 12 en el mismo plano que el de la pregunta 9.

15. ¿Qué observas en las gráficas?

16. Completa la siguiente Tabla 3; compara los resultados obtenidos de los datos de Monterrey y Buenos Aires.

	Diferencias	**Semejanzas**
Expresión algebraica		
Gráfica		

17. Justifica cada una de las diferencias y semejanzas que encontraste.

Discusión grupal (con base en las respuestas de los estudiantes y GeoGebra, se sugiere una discusión grupal de las respuestas de los participantes). En este momento se sugiere que se promueva una reflexión de los participantes acerca de una hipotética situación de enseñanza con los alumnos del nivel educativo en que participan. Como preguntas guías se sugieren: ¿Aplicarías esta actividad con tus alumnos? ¿Qué modificarías de esta actividad para aplicarla con sus estudiantes?, etc.

Capítulo 5: Caminando frente al sensor de movimiento

Secuencia didáctica

Armando Hernández Solís, Marco Antonio Santillán Vázquez, Héctor Pérez Aguilar. [1]

Problemática y propósitos de aprendizaje

Modelizamos el movimiento uniforme apoyados con un sensor de movimiento para presentar un acercamiento a la función lineal.

Que los estudiantes comprendan que la gráfica *distancia/tiempo* que da el sensor de movimiento **es una representación se du movimiento.**

Conceptos matemáticos involucrados

Generales: Variación, Modelación matemática, representaciones gráfica.

Específicos: Función lineal, gráficas de funciones lineales, pendiente, ordenada al origen.

Nivel de estudios

Primer semestre de bachillerato (15 a 16 años).

Total de actividades y duración aproximada

4 actividades, para realizarse en un total de 2 sesiones de 60 minutos cada una.

Materiales necesarios

- Sensor de movimiento Logger Lite.
- Una computadora con el software Logger Lite.
- Proyector.

Método o recomendaciones de enseñanza

El diseño de las actividades es fundamental del concepto de Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) (Simon, 1995; Simon & Tzur, 2004). Para lograr un objetivo formulamos un plan, consideramos que tenemos y qué no, los recursos, la ruta a seguir más adecuada, etc., imaginamos una secuencia de actividad, por ejemplo, al presentar un tema curricular en el aula, analizamos qué conocimientos y habilidades necesitan los alumnos y entonces diseñamos una secuencia de acciones en donde establecemos un orden y la profundidad de tratamiento de cada paso, metas intermedias y la trayectoria adecuada. La naturaleza del aprendizaje obliga a apoyarnos en elementos teórico-metodológicos que nos orienten sobre cómo ocurre o se favorece el aprendizaje, en dónde hay problemas, porqué, de qué tipo y cómo abordarlos; cómo sacar provecho de las tecnologías digitales para mejorar la enseñanza y apoyar el aprendizaje. Una vez diseñada la secuencia (THA), se, aplica, se hacen correcciones, se rediseñan pasos y desechan partes o todo, para volverse a aplicar.

---

[1] CCH-UNAM, México.

- **Actividad 1:** El profesor explica el funcionamiento del sensor de movimiento, en la ventana de trabajo expone las columnas tiempo, distancia, velocidad. La forma como se representa el movimiento en la gráfica distancia/tiempo. Invita a los estudiantes a caminar frente a este, uno por uno, y dándole oportunidad a que cada estudiante camine tres veces, observando las gráficas generadas de *distancia/tiempo*, e interpretando las gráficas del movimiento.
- **Actividad 2:** El profesor indica a un estudiante que se mueve frente al sensor, que camine con velocidad constante, a ritmo constante. Se debe establecer como equivalentes la velocidad del movimiento y la pendiente de la función lineal o recta de su gráfica; distinguir gráficamente tres rasgos, alejarse del sensor: /; acercarse: \; permanecer en reposo: —.
- **Actividad 3:** Se espera que los estudiantes puedan retomar los procedimientos y propiedades desarrollados en el trabajo en equipo y resaltados en la discusión grupal de la Actividad 2. Las preguntas 25 y 26 se deben abordar de manera individual, la parte restante de la Actividad 3 se realiza en equipo.
- **Actividad 4**. Dada una gráfica generada con picos por el software Logger Lite del sensor de movimiento, los estudiantes con su movimiento tratan de reproducir los picos caminando frene al sensor.

Referencias

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.

Simon, M. A. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.

Actividad 1: Iniciando a caminar frente al sensor de movimiento

Nombre:____ Grupo:__________ Fecha: _________

INSTRUCCIONES

Contesta las preguntas y realiza lo que se solicita en cada una de las actividades de tus hojas de trabajo.

Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Individual, 20 minutos

1. Observa cómo uno de tus compañeros camina frente al sensor de movimiento. Describe detalladamente la gráfica generada.

2. ¿Por qué en las gráfica siempre hay picos

3. ¿Qué variable está en el eje X? ¿Cuál en el eje Y?

4. ¿Qué relación hay entre la distancia a la que se encuentra el sensor del estudiante en donde empieza su movimiento, y la distancia en la que inicia el movimiento en t = 0?

Actividad 2: Caminando frente al sensor de movimiento

Nombre:____ Grupo:__________ Fecha: _________

INSTRUCCIONES

Contesta las preguntas y realiza lo que se solicita en cada una de las actividades de tus hojas de trabajo.

Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Individual, 40 minutos

1. Observa cómo uno de tus compañeros camina a velocidad constante frente al sensor de movimiento. Describe detalladamente la gráfica generada.

2. Si no hubiera ruido, que se refleja en picos en la gráfica, y el estudiante camina perfectamente, a una velocidad constante, ¿cómo sería su gráfica? Dibújala y argumenta por qué es así.

3. Toma dos instantes de tiempo, en la columna de tiempo, y calcula la velocidad en ese intervalo.

4. Ahora calcula la pendiente de la recta que modela su caminar y calcula la pendiente en el mismo intervalo de tiempo.

5. ¿Cómo son la velocidad y la pendiente calculadas en 3 y 4?

6. Si un estudiante se acerca al sensor a velocidad constante, ¿cómo es su gráfica? Dibújala.

7. Su velocidad es positiva, negativa o cero. Argumenta.

8. Su pendiente es positiva, negativa o cero. Argumenta..

9. Si un estudiante se aleja del sensor a velocidad constante, ¿cómo es su gráfica? Dibújala.

10. Su velocidad es positiva, negativa o cero. Argumenta.

11. Su pendiente es positiva, negativa o cero. Argumenta..

12. Si un estudiante se mantiene en reposo, ¿cómo es su gráfica? Dibújala.

13. Su velocidad es positiva, negativa o cero. Argumenta.

14. Su pendiente es positiva, negativa o cero. Argumenta.

Actividad 3: Reproduciendo gráficas dadas

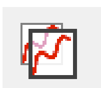
Nombre:____ Grupo:_________ Fecha: ________

INSTRUCCIONES

Contesta las preguntas y realiza lo que se solicita en cada una de las actividades de tus hojas de trabajo.

Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Individual, 30 minutos

1. En la ventana de trabajo del software Logger Lite, en la barra de herramientas dar clic ícono  para generar gráficas de movimiento generadas por el Software.

2. Dada una gráfica generada por el Logger Lite, un alumno camina frente al sensor para reproducirla con su movimiento. Dibuja ambas gráficas, la generada y la que se obtiene caminando.

3. En un segundo intento, repite el paso 2. Dibuja ambas gráficas, la generada y la que se obtiene caminando.

4. En un tercer intento, repite el paso 2. Dibuja ambas gráficas, la generada y la que se obtiene caminando.

Actividad 4: Reproduciendo un pico de una gráfica dada

Nombre:____ Grupo:_________ Fecha: ________

INSTRUCCIONES

Contesta las preguntas y realiza lo que se solicita en cada una de las actividades de tus hojas de trabajo.

Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Individual, 30 minutos

1. Dada una gráfica generada por el Logger Lite, un alumno camina frente al sensor para reproducirla con su movimiento. Dibuja ambas gráficas, la generada y la que se obtiene caminando.

2. Es posible reproducir los picos. Argumenta ampliamente.

Capítulo 6: Gráficas dinámicas ligadas

Secuencia didáctica

Armando Hernández Solís, Marco Antonio Santillán Vázquez, Héctor Pérez Aguilar. [1]

Problemática y propósitos de aprendizaje

Modelizamos el movimiento uniforme apoyados con gráficas dinámicas ligadas.

El objetivo es descubrir relaciones entre la gráfica de d/t y la de v/t, manipulando la gráfica.

Trabajando en este ambiente se consolidan relaciones y significados de pendiente, velocidad, distancia, área, continuidad-discontinuidad.

Conceptos matemáticos involucrados

Generales: Variación, modelación matemática, representaciones gráfica.

Específicos: Función lineal, gráficas de funciones de segmentos rectilíneos, pendiente, velocidad, relación entre variación y acumulación.

Nivel de estudios

Primer semestre de bachillerato (15 a 16 años).

Total de actividades y duración aproximada

4 actividades, que se realizan en un total de 90 minutos.

Materiales necesarios

- GeoGebra
- Applet de gráficas dinámicas ligadas.

Método o recomendaciones de enseñanza

Se diseñan las actividades bajo el concepto de Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) (Simon, 1995; Simon & Tzur, 2004). En una THA se tiene un objetivo, una meta, una ruta a seguir para lograrla desde los conocimientos que se tienen. Al final es necesario utilizar los nombres de los puntos y segmentos que.

Para Hernández & Santillán (2017), en las gráficas dinámicas ligadas (GDL), se comparte el tiempo, es el mismo para la gráfica de distancia, y para la gráfica de velocidad.

- **Actividad 1:** El profesor explica el funcionamiento de las gráficas dinámicas ligadas, y posteriormente deja que los estudiantes las exploren, para que encuentren relaciones entre segmentos de la gráfica de distancia con segmentos de la gráfica de velocidad.

---

[1] CCH-UNAM, México.

- **Actividad 2:** Describir qué sucede en la gráfica *v/t*, si dos segmentos se alinean en la gráfica d/t; relacionar un pico en la gráfica *d/t* con una discontinuidad en la gráfica *v/t*.
- **Actividad 3**. Justificar que el área del rectángulo en la gráfica de *v/t*, es la distancia recorrida. Se debe observar una relación de dependencia visual, donde al aumentar una aumenta la otra. Otro justificación es que al trabajar las unidades físicas, el área del rectángulo es base por altura, la base = tiempo (s), la altura = velocidad (m/s), pero también $d = v\ t$, obteniendo la unidad de (m) como resultado.

Referencias

Hernández, A. & Santillán, M. A. (2017). Construcción de relaciones gráficas intuitivas en el estudio de la variación y la acumulación apoyadas con tecnología digital. *VIII CIBEM 2017,* CB-892 (pp. 665-677). Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.

Simon, M. A. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.

Actividad 1: Relacionando segmentos de la gráfica de distancia con los de velocidad

Nombre:____ Grupo:__________ Fecha: _________

INSTRUCCIONES

Contesta las preguntas y realiza lo que se solicita en cada una de las actividades de tus hojas de trabajo.

Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Individual, 30 minutos

6. Manipula la aplicación de gráficas dinámicas ligadas, moviendo los puntos B, C, D y E. ¿Qué observas? Explica ampliamente.

7. Si un segmento de la gráfica de distancia tiene pendiente positiva, dibuja ese segmento.

8. Con respecto a la pregunta 2, el segmento correspondiente en la gráfica de velocidad, ¿dónde está?, ¿arriba, abajo o sobre el eje del tiempo? ¿Por qué?

4. Si un segmento de la gráfica de distancia tiene pendiente cero, dibuja ese segmento.

5. Con respecto a la pregunta 4, el segmento correspondiente en la gráfica de velocidad, ¿dónde está?, ¿arriba, abajo o sobre el eje del tiempo? ¿Por qué?

6. Si un segmento de la gráfica de distancia tiene pendiente negativa, dibuja ese segmento.

7. Con respecto a la pregunta 6, el segmento correspondiente en la gráfica de velocidad, ¿dónde está?, ¿arriba, abajo o sobre el eje del tiempo? ¿Por qué?

Actividad 2: Alineando segmentos

Nombre:____ Grupo:_________ Fecha: ________

INSTRUCCIONES

Contesta las preguntas y realiza lo que se solicita en cada una de las actividades de tus hojas de trabajo.

Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Individual, 30 minutos

1. Si un segmento en la gráfica de distancia se mueve para colocarse horizontalmente, ¿Qué sucede al segmento correspondiente en la gráfica de velocidad?

2. Explica por qué sucede lo anterior.

3. Observa cualquiera de los picos en la gráfica de distancia. ¿Qué asocias con el pico en la gráfica de velocidad?

4. Describir qué sucede en la gráfica de velocidad, si dos segmentos adyacentes se alinean en la gráfica de distancia.

5. ¿Qué le paso al pico que formaban ambos segmentos?

6. ¿Cómo explicas lo anterior?

Actividad 3: Área y distancia

Nombre:____ Grupo:__________ Fecha: ________

INSTRUCCIONES

Contesta las preguntas y realiza lo que se solicita en cada una de las actividades de tus hojas de trabajo.

Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Individual, 30 minutos

1. En la gráfica de distancia, arrastra el punto B para que el tiempo t_1, o longitud del intervalo O´R aumente. ¿Qué sucede con el área debajo del segmento PT, es decir el área del rectángulo O´RTP. ¿Aumenta o disminuye?

2. En la gráfica de distancia, la distancia recorrida desde O (tiempo cero) hasta t_1, ¿aumenta o disminuye?

3. En la gráfica de distancia, arrastra el punto B para que la altura del rectángulo O´RTP aumente. ¿Qué sucede con el área debajo del segmento PT, es decir el área del rectángulo O´RTP, aumenta o disminuye?

4. En la gráfica de distancia, la distancia recorrida con esta nueva altura, ¿aumenta o disminuye?

5. Si calculas el área del rectángulo O´RTP en la gráfica de velocidad, como la base por la altura, al multiplicar las unidades físicas $s\left(\frac{m}{s}\right)$, ¿Qué unidades se obtienen?

6. Si O´R es nuevamente el tiempo transcurrido desde un tiempo cero hasta t_1, ¿cómo es el área del rectángulo O´RTP, comparada con la distancia recorrida desde el tiempo inicial cero hasta t_1?

Capítulo 7: Actividades para la exploración gráfica de la integral y sus propiedades elementales

Actividades didácticas

Agustín Grijalva Monteverde, María Teresa Dávila Araiza.[1]

Problemática y propósitos de aprendizaje

Se presentan distintas actividades didácticas que pretenden apoyar el estudio de la integral mediante el desarrollo de procesos de visualización. Las actividades diseñadas tienen como propósito promover, como punto de partida, el significado de integral como función de área, no el de integral definida como valor fijo correspondiente al área de una región estática. Para ello, se parte de la noción de área variable en un contexto gráfico y dinámico creado con GeoGebra, y se promueve la exploración de propiedades de la integral (como función de acumulación) vinculadas al Teorema Fundamental del Cálculo, así como de propiedades elementales de la integral definida.

Conceptos matemáticos involucrados

Generales: Integral, variación, visualización matemática, función, y representación gráfica, numérica y algebraica.

Específicos: Función de acumulación, función área.

Nivel de estudios

Las actividades están diseñadas para estudiantes universitarios de ingeniería o de ciencias básicas.

Total de actividades y duración aproximada

2 actividades, para realizarse en un total de 6 sesiones de 50 a 60 minutos cada una.

Materiales necesarios

- Hojas de trabajo para cada estudiante
- Applets de GeoGebra para las actividades,
- Una computadora con GeoGebra para cada equipo de estudiantes. Los applets se diseñaron en GeoGebra clásico, versión 5.
- Proyector (para utilizar en discusiones grupales)

Método o recomendaciones de enseñanza

Las actividades requieren que el estudiante tenga experiencia con el uso de gráficas de funciones y sus transformaciones elementales (producto por una constante, sumar una constante) gráfica

[1] Universidad de Sonora, México.

y algebraicamente. También, se requiere experiencia básica en GeoGebra como: activar rastro de puntos, activar casillas, escribir expresiones algebraicas, usar deslizadores y arrastrar puntos.

- **Actividad 1:** Se propone que el estudiante trabaje con funciones positivas sencillas en el intervalo $[0, x]$, con el propósito de que el estudiante identifique, para una función f, su correspondiente función de área $A(x)$ y relacione ambas funciones a través de la siguiente relación que involucra la derivada de A: $A'(x) = f$. En la actividad 1 se inicia con funciones constantes, siguiendo con funciones lineales.
- **Actividad 2:** Se plantean situaciones problema en un contexto de movimiento, buscando que los estudiantes relacionen claro función área de la actividad 1 con la distancia recorrida por un objeto móvil para funciones de velocidad constantes, lineales y cuadráticas.

Actividad 1: La función de área

Nombre:____ Grupo:__________ Fecha: _________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Abre el archivo de GeoGebra ACTIVIDAD 1 y lee con cuidado lo que se solicita que realices.

En cada bloque se indica si debes trabajar de manera individual o en equipo. Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Bloque 1 (Trabajo Individual, 15 minutos)

1. La Gráfica roja representa la función constante $f(x) = 2$ en el intervalo $[0, x]$. Desliza el punto de color rosa cuya abscisa representa el valor de x. ¿Qué pasa con la gráfica de f conforme varía x?

2. Activa la casilla “Mostrar región” y contesta lo siguiente: ¿Cómo cambia el área A de la región sombreada al variar x? ¿Por cada unidad que aumenta x, cómo varía el área A? Puedes elaborar una tabla de valores para el área A de acuerdo con los valores de x para apoyarte.

3. Si consideramos que el área A es una función de x, ¿cuál función es? Justifica tu respuesta.

Bloque 2 (Trabajo en Equipo, 25 minutos)

4. Activen la casilla “Par ordenado” y hagan variar x, aparecerá un punto P ¿Qué representan las coordenadas de P?

5. Activen el rastro de P y observen la gráfica que traza al variar x ¿Qué función creen que sea?

Activa la casilla “Expresión algebraica”, aparecerá un espacio en blanco para que escriban la expresión algebraica de la función cuya gráfica traza el punto P, y se mostrará la gráfica correspondiente a la expresión que escriban.

6. ¿Cuál es la expresión algebraica correspondiente a la gráfica trazada por el punto P? Expliquen cómo llegaron a esa conclusión.

7. En los siguientes ejercicios, con ayuda de GeoGebra, encuentren la expresión algebraica de la función trazada por el punto P, a la que llamaremos $A(x)$.

$f(x) = 3$ $A(x) =$ ________________		$f(x) = k$ $A(x) =$ ________________

8. ¿Qué relación encuentran entre las funciones f y A? Expliquen detalladamente.

Bloque 3 (Discusión Grupal, 15 minutos)

9. Comparen sus respuestas con el resto de los equipos. Anota abajo ideas importantes que no consideraron en tu equipo al contestar.

Bloque 4 (Trabajo en equipo, 30 minutos)

10. Ahora, con ayuda del archivo de GeoGebra, grafiquen una función lineal en el intervalo $[0, x]$ y contesten lo siguiente: ¿Cómo cambia el área A de la región sombreada al variar x? ¿Por cada unidad que aumenta x, cómo varía el área A? Anoten sus cálculos.

11. ¿Qué tipo de función es A? Determinen su expresión algebraica.

12. Elijan una función lineal diferente en el intervalo $[0, x]$ y determinen la expresión algebraica correspondiente a A.

Bloque 5 (Discusión Grupal, 25 minutos)

Compartan al grupo las funciones f que eligieron en tu equipo y las funciones A que le corresponden a cada una.

13. ¿Encuentras alguna relación importante que se cumpla entre las funciones f y A que eligieron otros equipos? ¿Cuál? Explica detalladamente.

14. Para una función lineal $f(x) = kx$, ¿cuál sería la expresión de su función correspondiente A en el intervalo $[0, x]$?

Bloque 6 (Trabajo en equipo, 35 minutos)

Ahora, con ayuda de GeoGebra, exploren qué pasa con la función área A correspondiente a una función f cuando el intervalo considerado no inicia en cero, sino en otro valor a, es decir, si ahora es el intervalo $[a, x]$ y contesten lo siguiente:

15. Para una función constante $f(x) = k$, ¿cuál sería la expresión de su función correspondiente A en el intervalo $[a, x]$? Expliquen cómo hicieron para llegar a esta respuesta.

16. Para una función lineal $f(x) = kx$, ¿cuál sería la expresión de su función correspondiente A en el intervalo $[a, x]$? Expliquen cómo hicieron para llegar a esta respuesta.

Bloque 7 (Discusión Grupal, 25 minutos)

17. Comparen sus respuestas con el resto de los equipos. Anota abajo ideas importantes que no consideraron en tu equipo al contestar.

Actividad 2: función de área en un contexto de movimiento

Nombre:____ Grupo:_________ Fecha: ________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Abre el archivo de GeoGebra ACTIVIDAD 2 y lee con cuidado lo que se solicita que realices.

En cada bloque se indica si debes trabajar de manera individual o en equipo. Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Bloque 1: (Trabajo Individual, 10 minutos)

Un cuerpo se mueve en línea recta de tal forma que la gráfica de su velocidad (en *m/seg*) con respecto al tiempo (en *seg*), se muestra en la siguiente gráfica. Contesta lo que se solicita.

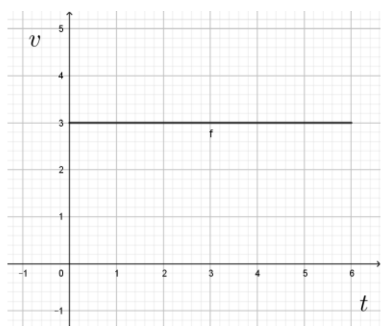


Figura 1

1. ¿Cuál es su velocidad a los 3 segundos de movimiento? ¿Y a los 5 segundos?

2. ¿Puedes determinar la distancia recorrida por el objeto al moverse durante los seis segundos que se muestran en la gráfica?

3. ¿Y si aumentamos el tiempo a 7 seg, qué sucede con la distancia recorrida, cuánto es ahora su valor? ¿Y a los 8 seg? ¿Qué sucede conforme aumentamos el tiempo de observación?

Bloque 2 (Trabajo en Equipo, 25 minutos)

4. Discuten sus respuestas a las preguntas del bloque anterior y lleguen a un consenso.
5. ¿Está representada gráficamente la distancia recorrida por el objeto durante cada tiempo considerado?

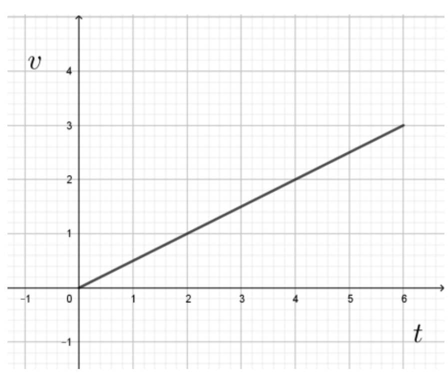
6. ¿Cómo se representa gráficamente esa distancia y qué sucede conforme aumentamos el tiempo de observación?

Bloque 3 (Discusión Grupal, 20 minutos)

7. Discutan sus respuestas con el resto de los equipos. Anota abajo ideas importantes que no consideraron en tu equipo al contestar.

Bloque 4: (Trabajo en equipo, 35 minutos)

Un cuerpo se mueve en línea recta de tal forma que la gráfica de su velocidad (en *m/seg*) con respecto al tiempo (en *seg*), se muestra en la siguiente gráfica. Contesta lo que se solicita.



8. ¿Cuál es su velocidad a los tres segundos de movimiento? ¿Y a los *5* segundos?

9. ¿Puedes determinar la distancia recorrida por el objeto al moverse durante cierto tiempo, por ejemplo, después de 3 segundos de movimiento? ¿Y después de 4 segundos cuánto es la distancia recorrida? ¿Y después de 5 seg? ¿De 6 seg?

10. ¿Está representada gráficamente la distancia recorrida por el objeto en cada intervalo de tiempo considerado? ¿Cómo se representa la distancia recorrida gráficamente?

Bloque 5 (Discusión Grupal, 25 minutos)

Discutan con los equipos sus respuestas al bloque anterior y lleguen a un consenso.

Bloque 6 (Trabajo en equipo, 40 minutos)

Una forma de asegurarnos de que nuestro cálculo de la distancia recorrida en cada intervalo considerado es correcto, consiste en hacer uso de nuestros conocimientos sobre el comportamiento de la velocidad, en tanto que la velocidad es la derivada de la posición. Veamos esto con mayor atención.

11. Escribe una expresión algebraica que represente a la velocidad del objeto con respecto al tiempo. Considerando que la velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo, determina ahora una expresión para obtener la posición en cada instante.

12. ¿Cómo podemos obtener ahora la distancia recorrida en un intervalo tiempo considerado, por ejemplo, de *0* a *6* segundos de movimiento? ¿Y del segundo *6* al segundo *7*? ¿Del segundo *0* al segundo *7*?

13. Si en un intervalo del tiempo, el objeto se moviera con velocidad constante igual a la velocidad promedio durante ese intervalo, ¿qué sucedería con la distancia recorrida? Para verificar tu respuesta, determina la velocidad promedio en un recorrido de *0* a *7* segundos y calcula la distancia recorrida correspondiente.

14. Tomado en cuenta la linealidad de la velocidad con respecto al tiempo, ¿puedes determinar la velocidad promedio sin conocer la distancia recorrida? ¿Cómo lo harías?

Bloque 5 (Discusión Grupal, 20 minutos)

15. Comparen sus respuestas con el resto de los equipos. Anota abajo ideas importantes que no consideraron en tu equipo al contestar.

Capítulo 8: Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas a través de la Visualización

Secuencia didáctica

José David Zaldívar Rojas, Beatriz Adriana Vega Herrera. [1]

Problemática y propósitos de aprendizaje

Cuando se inicia el estudio de los Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) en Secundaria (alrededor de los 13 a 15 años), comúnmente se enfatizan los métodos algebraicos, con poca atención a argumentos visuales, lo cual provoca significados deficientes relativos a la *solución* del sistema. Con la intención de resaltar significados relativos a la *solución de un SEL,* la presente propuesta de actividades toma en consideración a la Visualización Matemática y la variación de parámetros como elementos clave para abordar la noción de solución de un SEL bajo una perspectiva funcional, esto es, considerar de entrada a las ecuaciones que conforman el SEL, como funciones y elaborar un trabajo enteramente visual para abordar el comportamiento de las gráficas de las funciones que conforman el sistema según el comportamiento de sus parámetros: la pendiente y la ordenada al origen.

De manera que el significado asociado a la solución de un sistema dependerá de las condiciones de los parámetros (pendiente y ordenada al origen) de las funciones lineales del sistema.

Conceptos matemáticos involucrados

Generales: Visualización matemática, Variación de parámetros.

Específicos: sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, función lineal.

Nivel de estudios

Nivel Secundaria (13 a 15 años).

Total de actividades y duración aproximada

10 actividades, para realizarse en un total de 6 sesiones de 60 minutos cada una.

Materiales necesarios

- Actividad impresa para cada estudiante.
- Equipos de cómputo (o tablets) con Geogebra o con algún programa de geometría dinámica como Cabri, entre otros. No importa la versión, dado que se utilizarán comandos básicos como recta que pasa por dos puntos, punto, pero sí es requisito indispensable que pueda contar con arrastre. El equipo puede ser utilizado individualmente o en equipos de trabajo según la disponibilidad y cantidad de estudiantes y equipos. No se utilizará un *applet* de geogebra dado que solo se utilizarán herramientas básicas de arrastre del mismo.

[1] Universidad Autónoma de Coahuila, México

Método o recomendaciones de enseñanza

Las actividades y tareas que componen a la presente propuesta se plantean en términos de una alternativa para el aprendizaje de los SEL, en particular, de la *solución* de un SEL. Es por ello que el diseño instruccional tiene un punto de partida diferente a lo que plantean comúnmente los planes curriculares o los libros de texto relativos al tema. Se plantea como inicio un *acercamiento funcional* (Sfard y Linchevski (1994) citadas en Ochoviet (2009, Vega, 2018) al tópico a través del análisis gráfico del comportamiento de una función lineal a partir de sus parámetros. Esta innovación permite un acercamiento a la noción de solución de un SEL por medio de la construcción de conjeturas sobre las posibilidades de un par de rectas en el plano cuando se varían los parámetros de cada una de ellas.

Ahora bien, a manera de hipótesis se considera que el trabajo inicial con gráficas resultará en una comprensión más robusta sobre el tipo de solución de un sistema, puesto que no se define de antemano qué es una solución, sino se habla de las condiciones que cumplen un par de rectas en el plano y qué posibilidades tienen. La geometría dinámica nos posibilita este tipo de reflexiones y promueve la argumentación gráfica y visual entre los estudiantes. Se espera que los estudiantes puedan identificar rápidamente cuando dos rectas se cortan o no (rectas paralelas) pero no así cuando son “la misma recta”.

Las tareas que componen las actividades se presentan a continuación con sus respectivos objetivos de aprendizaje particulares. Las actividades se dividen en dos momentos: variación de parámetros y SEL, debido a la preparación previa que se requiere que los estudiantes de secundaria tengan al momento de discutir sobre la noción de solución de un SEL.

Momento 1. Variación de parámetros en la función lineal

Actividad	Tareas	Objetivo
$\boldsymbol{m > 0}$ $\boldsymbol{b = 0}$	1.1. Completa la tabla y responde	Que el estudiante sea capaz de completar la tabla observando el patrón que se indicaba para ubicarlos en el plano cartesiano.
	1.2. Clasifica la gráfica	El objetivo de esta tarea es que los estudiantes puedan identificar y clasificar el tipo de gráfica que obtuvieron
	1.3. Relacionar la gráfica con su ecuación	Que el estudiante sea capaz de interpretar una función de dicha gráfica y construir su forma algebraica
	1.4. Completar tablas para diferentes valores positivos de la pendiente	Que el estudiante complete las tablas usando la expresión algebraica y reconozca un patrón gráfico
	1.5. Reconocimiento del tipo de función	Sin realizar las gráficas, el objetivo es que el estudiante prediga el tipo de función que se obtiene.
	1.6. Reconocimiento del comportamiento gráfico de las funciones	Que el estudiante analice las gráficas de las funciones que construye y reconozca un patrón gráfico en el comportamiento de las mismas, y así poder clasificarla destacando características
	1.7. Anticipación de una forma gráfica 1.8. Construcción de la gráfica	Que el estudiante sea capaz de anticipar la forma de la gráfica de acuerdo al valor de la pendiente sin construir la tabla de valores.

	1.9. Reconocimiento del efecto del parámetro m cuando m>0	Que el estudiante reconozca y argumente que mientras la pendiente es más grande, el efecto en al gráfica es que la línea recta se "acerca mas" al eje y desde los cuadrantes 1 y 3.
$\boldsymbol{m < 0}$ $\boldsymbol{b = 0}$	Las tareas 2, 3 y 4 que componen a estas actividades se organizan de la misma manera que para el caso anterior.	Los objetivos de las tareas son los mismos que en el caso anterior, pero en el caso de la última tarea, el objetivo es que el estudiante reconozca y argumente que mientras la pendiente es más pequeña, el efecto en al gráfica es que la línea recta se "acerca mas" al eje y, pero desde los cuadrantes 2 y 4
$\boldsymbol{0 < m < 1}$ $\boldsymbol{b = 0}$		El objetivo general de ambas actividades es que los estudiantes reconozcan y argumenten que cuando la pendiente es un valor entre 0 y 1, el comportamiento de la gráfica lineal será "acercarse" cada vez más al eje X. El signo de la pendiente tendrá el mismo efecto que en los casos anteriores.
$\boldsymbol{-1 < m < 0}$ $\boldsymbol{b = 0}$		
Tomando $\boldsymbol{m}$ fijo, $\boldsymbol{b > 0}$ $\boldsymbol{b < 0}$	5.1. Completar la tabla y construir la gráfica en el plano	El objetivo es construir la gráfica observando el patrón que se obtiene en la tabla y que se argumente sobre cómo construir la gráfica pero sin necesidad de realizar la tabla.
	5.2. Reconocer el comportamiento de la gráfica	Que el estudiante sea capaz de observar el corte que se obtiene en el eje Y cuando la ordenada es positiva o negativa
	5.3. Trabajo con la función $ax + by = c$ y su relación con $y = mx + b$	El objetivo es que el estudiante reconozca la misma función lineal representada de otra manera.
	5.4. Conjeturar el comportamiento de la gráfica	Se pretende que el estudiante argumente sobre el comportamiento ahora del corte de las rectas con el eje y cuando se trabaja con la ordenada al origen positiva y negativa
Síntesis de la variación de parámetros	6.1. Relacionar funciones con gráficas	Esta tarea tiene por objetivo que el estudiante identifique y relacione gráficas en el plano con la ecuación de un función lineal
	6.2. Construcción de ecuaciones	Que el estudiante sea capaz de dar una expresión algebraica según la gráfica de una función lineal que le corresponda
	6.3. Análisis de parámetros 6.4. Análisis de parámetros 6.5 Análisis de parámetros	Que el estudiante reconozca los parámetros involucrados en el modelo lineal cuando se presentan diferentes formas ($ax + by = c, y = mx + b$

Momento 2. Posibilidades en el plano y la noción de solución simultánea de un SEL

Actividad	Tareas	Objetivo
Laboratorio con tecnología 1	7.1. Construcción de rectas en el plano usando geogebra	El objetivo de esta actividad es que el estudiante analice las condiciones de dos rectas en un plano a partir de la geometría dinámica y que argumente sobre las posibilidades que se presentan cuando dos rectas están en el plano: se cortan, son paralelas o son la misma
Laboratorio con tecnología 2	8.1. Construcción de rectas en el plano usando geogebra.	El objetivo de esta tarea es que el estudiante sea capaz de relacionar la ecuación de una recta con su gráfica usando la geometría dinámica. En esta tarea ya se comienza con el análisis de parejas de funciones, tratadas como sistemas.

	8.2. Identificación de los parámetros del sistema	Esta tarea tiene por objetivo que el estudiante identifique características subyacentes con respecto a los valores de los parámetros que se le presentan y el tipo de posibilidad que tendrán las parejas de gráficas en el plano.
	8.3. Características de las gráficas 8.4. Predicción del comportamiento	Estas tareas tienen por objetivo que el estudiante anticipe el comportamiento del sistema según los valores de los parámetros: si las pendientes son iguales pero diferentes ordenadas, etc.
	8.5. Comportamiento del sistema	Esta tarea tiene por objetivo que el estudiante identifique las condiciones de los parámetros de dos rectas paralelas o cuando una es múltiplo de la otra (la misma recta)
Solución de un Sistema	9.1. Identificación de los parámetros del sistema	El objetivo es que el estudiante use la expresión algebraica que componen al sistema para determinar el valor de la pendiente y ordenada al origen.
	9.2. Clasificación de la solución	El objetivo es que el estudiante sin realizar tablas, ni gráficas, sea capaz de reconocer el tipo de solución del sistema.
Síntesis de la solución de un sistema	10.1. Construcción del sistema	El objetivo de la tarea es que el estudiante a partir de las gráficas de funciones lineales que conforman un sistema, sea capaz de asignar los valores de los parámetros en la ecuación de la función lineal a partir de una lista de valores dados
	10.2. Tipo de solución	A partir de los sistemas construidos en la tarea previa, que el estudiante reconozca las condiciones del par de rectas y determine el tipo de solución

Para cada una de las actividades planteadas el profesor puede entregar la actividad impresa y solicitarle que sigan las instrucciones que vienen en cada una de ellas. Debe permitir que los estudiantes exploren el ambiente gráfico con el que trabajan y explicar las herramientas que se utilizarán, así como los comandos. Asimismo, debe permitir a los estudiantes resolver individualmente o por equipos pequeños las tareas, posteriormente en plenaria debe sintetizar e institucionalizar los acuerdos y conjeturas planteadas por los estudiantes.

Dado que el acercamiento se basa en considerar a cada ecuación del sistema como una función lineal, probablemente el profesor requiera trabajar previamente con los estudiantes sobre el plano cartesiano y la ubicación de puntos en el mismo.

Referencias

Ochoviet, C. (2009). *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. Tesis inédita de doctorado. CICATA, Ciudad de México, México

Vega, B. (2018). *Investigación basada en el diseño para el estudio de la noción de solución de un sistema de ecuaciones lineales en estudiantes de Secundaria*. Tesis inédita de Maestría. Universidad Autónoma de Coahuila, Saltillo, México.

Actividad 1: y = mx, con m >0

Nombre:____ Grupo:_________ Fecha: ________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Realiza las siguientes tareas y contesta las preguntas que se te realizan en cada una de las actividades.

Tareas 1.1 - 1.9 (Individual o en equipos, 50 minutos)

1. Usando el software *Geogebra* obtén las siguientes gráficas en un mismo plano cartesiano y contesta las siguientes preguntas

   a) De color rojo traza la recta identidad $\boldsymbol{y = x}$

   b) En el mismo plano cartesiano realiza las siguientes graficas de color verde y anota a un lado el valor de la pendiente de cada uno, denotándolo con la letra m

Función	Valor de la pendiente (*m*)
$y = 2x$	
$y = 7x$	
$y = 19x$	
$y = 41x$	

   c) ¿Qué tipos de gráficas se obtuvieron en todas las funciones?

   d) ¿Escribe dos características de las funciones que obtuviste?

e) Sin realizar la gráfica en Geogebra ¿Qué tipo de grafica sería una función $y = 82x$? Comprueba tu respuesta en *Geogebra*

f) ¿Qué sucede cuando la pendiente de la función va creciendo? Escribe dos observaciones que hayas notado con los resultados que obtuviste en Geogebra:

Actividad 2: y = mx, con m < 0

Nombre:____ Grupo:________ Fecha: _______

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Realiza las siguientes tareas y contesta las preguntas que se te realizan en cada una de las actividades.

Tareas 2.1 – 2.9 (Individual o en equipos, 50 minutos)

1. Usando el software *Geogebra* obtén las siguientes gráficas en un mismo plano cartesiano y contesta las siguientes preguntas

   a) De color rojo traza la recta identidad $\boldsymbol{y = -x}$

   b) En el mismo plano cartesiano realiza las siguientes graficas de color verde y anota a un lado el valor de la pendiente de cada uno, denotándolo con la letra m

Función	Valor de la pendiente (*m*)
$y = -2x$	
$y = -7x$	
$y = -19x$	
$y = -41x$	

   c) ¿Qué tipos de gráficas se obtuvieron en todas las funciones?

   d) ¿Escribe dos características de las funciones que obtuviste?

e) Sin realizar la gráfica en Geogebra ¿Qué tipo de grafica sería una función $y = -82x$? Comprueba tu respuesta en *Geogebra*

f) ¿Qué sucede cuando la pendiente de la función va creciendo? Escribe dos observaciones que hayas notado con los resultados que obtuviste en Geogebra:

Actividad 3: y = mx, con 0< m < 1

Nombre:______________________________ Grupo:__________ Fecha: _________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Realiza las siguientes tareas y contesta las preguntas que se te realizan en cada una de las actividades.

Tareas 3.1 – 3.9 (Individual o en equipos, 50 minutos)

1. Usando el software *Geogebra* obtén las siguientes gráficas en un mismo plano cartesiano y contesta las siguientes preguntas

   a) De color rojo traza la recta identidad $\boldsymbol{y = x}$

   b) En el mismo plano cartesiano realiza las siguientes graficas de color verde y anota a un lado el valor de la pendiente de cada uno, denotándolo con la letra m

Función	Valor de la pendiente (*m*)
$y = \frac{1}{2}x$	
$y = \frac{1}{4}x$	
$y = \frac{1}{12}x$	
$y = \frac{1}{21}x$	

   c) ¿Qué tipos de gráficas se obtuvieron en todas las funciones?

d) ¿En qué es diferente al caso 1? Menciona dos características

e) Sin realizar la gráfica en Geogebra ¿Qué tipo de grafica sería una función $y = \frac{1}{42}x$? Comprueba tu respuesta en *Geogebra*

f) ¿Qué sucede cuando la pendiente de la función se va haciendo más pequeña? Escribe dos observaciones que hayas notado con los resultados que obtuviste en *Geogebra:*

Actividad 4: y = mx, con -1 < m < 0

Nombre:____ Grupo:__________ Fecha: _________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Realiza las siguientes tareas y contesta las preguntas que se te realizan en cada una de las actividades.

Tareas 4.1 – 4.9 (Individual o en equipos, 50 minutos)

1. Usando el software *Geogebra* obtén las siguientes gráficas en un mismo plano cartesiano y contesta las siguientes preguntas
   a) De color rojo traza la recta identidad $\boldsymbol{y = -x}$
   b) En el mismo plano cartesiano realiza las siguientes graficas de color verde y anota a un lado el valor de la pendiente de cada uno, denotándolo con la letra m

Función	Valor de la pendiente (*m*)
$y = -\frac{1}{2}x$	
$y = -\frac{1}{4}x$	
$y = -\frac{1}{12}x$	
$y = -\frac{1}{21}x$	

   c) ¿Qué tipos de gráficas se obtuvieron en todas las funciones?

d) ¿En qué es diferente al caso 1? Menciona dos características

e) Sin realizar la gráfica en Geogebra ¿Qué tipo de grafica sería una función $y = -\frac{1}{42}x$? Comprueba tu respuesta en *Geogebra*

f) ¿Qué sucede cuando la pendiente de la función se va haciendo más pequeña? Escribe dos observaciones que hayas notado con los resultados que obtuviste en *Geogebra:*

Actividad 5: $y = mx + b$, con m fijo, $b > 0$, $b < 0$

Nombre:______________________________ Grupo:__________ Fecha: _________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Realiza las siguientes tareas y contesta las preguntas que se te realizan en cada una de las actividades.

Tareas 5.1 – 5.9 (Individual o en equipos, 50 minutos)

1. Usando el software *Geogebra* obtén las siguientes gráficas en un mismo plano cartesiano y contesta las siguientes preguntas
   a) De color rojo traza la recta identidad $\boldsymbol{y = 2x}$
   b) En el mismo plano cartesiano realiza las siguientes graficas de color negro y anota a un lado el valor de la pendiente de cada uno, denotándolo con la letra m y el valor de la ordenada b

Función	Valor de la pendiente (m)	Valor de la ordenada al origen (b)
$y = 2x + 3$		
$y = 2x + 5$		
$y = 2x + 13$		
$y = 2x + 21$		

   c) ¿Qué observas cuando la ordenada al origen es positiva? Escribe dos observaciones

   d) Escribe tres características que observas en todas las gráficas que obtuviste en el plano cartesiano

e) Sin realizar la gráfica en Geogebra ¿Qué tipo de grafica sería una función $y = -\frac{1}{42}x$? Comprueba tu respuesta en *Geogebra*

f) Ahora en el mismo plano realiza las siguientes gráficas de color azul que aparecen en la tabla y completa anotando el valor de la pendiente *m* y la ordenada al origen *b*

Función	Valor de la pendiente (m)	Valor de la ordenada al origen (b)
$y = 2x - 3$		
$y = 2x - 8$		
$y = 2x - 12$		
$y = 2x - 19$		

g) ¿Qué observas cuando la ordenada al origen es positiva? Escribe dos observaciones

h) ¿Cómo es la gráfica de la función 4x+2y=10? Explica

i) ¿Por qué se dice que la pendiente es la inclinación de la recta? Explica

Actividad 6: Síntesis de la variación de parámetros

Nombre:______________________________ Grupo:__________ Fecha: _________

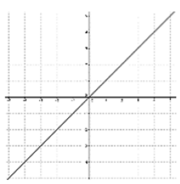
Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Realiza las siguientes tareas y contesta las preguntas que se te realizan en cada una de las actividades.

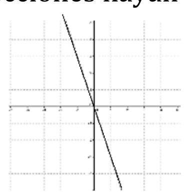
Tareas 6.1 – 6.9 (Individual o en equipos, 50 minutos)

1. Anota en cada gráfica la función lineal y la pendiente que le corresponde a cada una: $y = 0.3x$, $y = x$, $y = 0.05x$, $y = -x$, $y = -0.4x$, $y = 20x$, $y = -3x$. Posteriormente, comprueba usando el Geogebra que tus elecciones hayan sido las correctas.



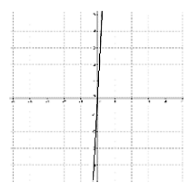
Funcion: __________

m = _________



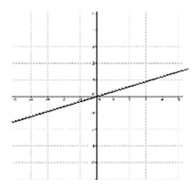
Funcion: __________

m = _________



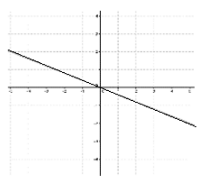
Funcion: __________

m = _________



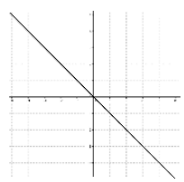
Funcion: __________

m = _________



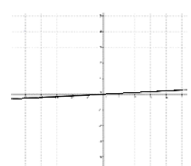
Funcion: __________

m = _________



Funcion: __________

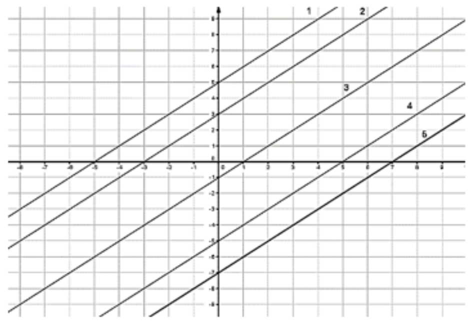
m = _________



Funcion: __________

m = _________

2. En el siguiente plano cartesiano se tienen cinco funciones lineales. Escribe la función que le corresponde a cada grafica, indica también la pendiente y ordenada al origen. $y=x+3$, $y=x-1$, $y=x-7$, $y=x+5$, $y=x-5$. Comprueba posteriormente con el Geogebra que tus elecciones hayan sido correctas.



Función 1: ____________ m = ________ b = ________

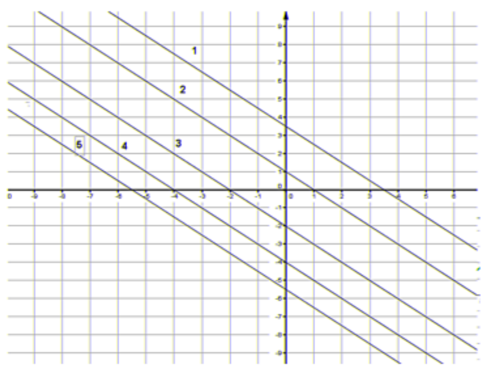
Función 2: ____________ m = ________ b = ________

Función 3: ____________ m = ________ b = ________

Función 4: ____________ m = ________ b = ________

Función 5: ____________ m = ________ b = ________

3. En el siguiente plano cartesiano se tienen cinco funciones lineales. Escribe la funci´on que le corresponde a cada grafica, indica tambi´en la pendiente y ordenada al origen: y= -x+3.5, y= -x-4, y= -x+1, y= -x-5.5, y= -x-2 . Comprueba posteriormente con el Geogebra que tus elecciones hayan sido correctas.



Función 1: ____________ m = ________ b = ________

Función 2: ____________ m = ________ b = ________

Función 3: ____________ m = ________ b = ________

Función 4: ____________ m = ________ b = ________

Función 5: ____________ m = ________ b = ________

4. Escribe dos características que representa la pendiente (positiva y negativa) en el plano cartesiano

5. Que indica en el plano cartesiano la ordenada al origen

6. Que diferencia existe cuando las funciones lineales pasan por el origen o fuera del origen. Escribe tres

7. ¿Es x+y = 8 una función lineal? Explica tu respuesta

Actividad 7: ¿Cuántas posibilidades existen en el plano? Laboratorio con Tecnología 1

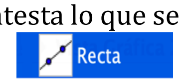
Nombre:____ Grupo:_________ Fecha: ________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Realiza las siguientes tareas y contesta las preguntas que se te realizan en cada una de las actividades.

Tareas 7.1 (En equipos, 50 minutos)

1. Abre el programa *Geogebra* y en una hoja de trabajo en blanco contesta lo que se te pide:
   a) Traza una *recta que pasa por dos puntos* (usar la herramienta: 

)

   b) *Manipula la recta* (puedes mover la recta como desees).

   c) En la hoja de trabajo de *Geogebra* que ya tienes, construye otra *recta que pase por dos puntos* usando la misma herramienta que en el inciso a.

   d) Manipula las dos rectas que construiste.

   e) Completa la siguiente tabla con las posibilidades que se pueden encontrar cuando hay dos rectas en un plano

Posibilidades	Dibujo	Observación
uno		
dos		
tres		
cuatro		

Actividad 8: Laboratorio con Tecnología 2

Nombre:____ Grupo:__________ Fecha: ________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Realiza las siguientes tareas y contesta las preguntas que se te realizan en cada una de las actividades.

Tareas 8.1 – 8.5 (En equipos, 50 minutos)

En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas usando el método gráfico se tienen tres tipos de soluciones o posibilidades entre ambas rectas:

a) **Solución única**: cuando las dos rectas coinciden simultaneamente en un punto

b) **No tiene solución**: Cuando las rectas son paralelas

c) **Infinitas soluciones**: cuando las rectas coinciden en todos los puntos, es decir, cuando está una "encima" de la otra.

1. De acuerdo a lo anterior obtén las gráficas en *Geogebra* de cada uno de los problemas que se presentan y completa la tabla

Problema	Sistema de ecuaciones lineales	Representación gráfica en *Geogebra*	Tipo de solución
Uno	1) $y = 2x+8$ 2) $y = x+4$		
Dos	1) $y = 6x-10$ 2) $y - 6x+10=0$		
Tres	1) $y = -2x-1$ 2) $y = -2x+5$		
Cuatro	1) $y = -3x-2$ 2) $y = -3x -5$		
Cinco	1) $y = 3.4x+5$ 2) $y =-x +5$		
Seis	1) $y = -2x-3$ 2) $4y+8x+12=0$		

2. Con las representaciones graficas que obtuviste en la tabla responde lo siguiente.

a) ¿Qué forma tienen todas las funciones que graficaste?

b) ¿En cuál sistema de ecuaciones aparece únicamente una recta?

c) ¿Qué característica deben tener los coeficientes (pendiente y ordenada) del sistema de ecuaciones lineales para que las rectas coincidan en todos los puntos?

d) ¿En cuál sistema de ecuaciones aparecen rectas paralelas?

e) ¿Qué característica deben tener los coeficientes (pendiente y ordenada al origen) del sistema de ecuaciones lineales para que las rectas sean paralelas?

f) ¿En cuál sistema de ecuaciones las rectas se intersectan en un punto?

g) ¿Cuál es el valor del par ordenado *(x,y)* en donde se intersectan las gráficas de los sistemas de ecuaciones lineales?

h) ¿Qué característica deben tener los coeficientes (pendiente y ordenada) del sistema de ecuaciones lineales para que las rectas se intersecten?

Actividad 9: Solución de un Sistema

Nombre:____ Grupo:_________ Fecha: ________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Realiza las siguientes tareas y contesta las preguntas que se te realizan en cada una de las actividades.

Tareas 9.1 – 9.2 (En equipos, 50 minutos)

1. Sin el uso del software *Geogebra* completa la siguiente tabla. Posteriormente comprueba tus resultados usando el geogebra.

Funciones lineales	Valor de la pendiente	Valor de la ordenada al origen	Tipo de solución
1) $y = 7x+5$ 2) $y = -2x-3$	m = ____ m = _____	b = ____ b = _____	
1) $y - 4x + 8 = 0$ 2) $y +8 = 4x$	m = ____ m = _____	b = ____ b = _____	
1) $y = -3x + 2$ 2) $y = -2x + 2$	m = ____ m = _____	b = ____ b = _____	
1) $y = 3.4x +2$ 2) $y +2 = 4x$	m = ____ m = _____	b = ____ b = _____	

Actividad 10: Síntesis de la Solución de un Sistema

Nombre:____ Grupo:__________ Fecha: _________

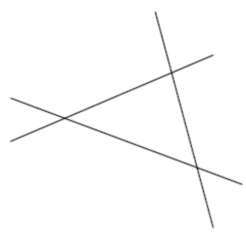
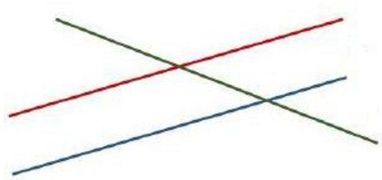
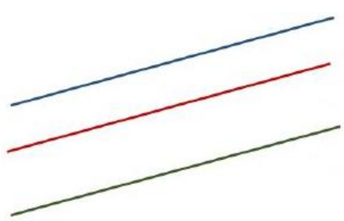
Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Realiza las siguientes tareas y contesta las preguntas que se te realizan en cada una de las actividades.

Tareas 10.1 – 10.2 (En equipos, 50 minutos)

1. En la siguiente tabla determina el número de soluciones que tendrá el sistema de ecuaciones lineales que representa cada una de ellas e indica cuáles son las soluciones

Representación grafica	Tipo de solución
	
	
	

Capítulo 9: Visualización de métodos numéricos para aproximar raíces de funciones

Secuencia didáctica

César Fabián Romero Félix[1]

Problemática y propósitos de aprendizaje

Entre los métodos dinámicos más accesibles para aproximación de raíces de funciones se destacan el método de *Newton-Raphson* y el método de *bisección* para encontrar raíces de funciones de una variable real. Se plantea favorecer el desarrollo de estructuras mentales de conceptos matemáticos como: a partir de la aproximación sistemática a la solución de problemas de modelación.

Conceptos matemáticos involucrados

Generales: Variación, relaciones algebraicas, visualización matemática; representaciones gráfica, numérica y algebraica.

Específicos: variable, relación funcional, polinomios de una variable, raíces, derivada y aproximación numérica.

Nivel de estudios

Las actividades son diseñadas para apoyar a estudiantes de cursos Cálculo Diferencial y Álgebra superior en el área de Ingeniería o de Ciencias de Computación.

Total de actividades y duración aproximada

La propuesta incluye dos actividades, organizadas en tres etapas cada una: problema inicial, discusión grupal y ejercicios. La duración estimada de ambas actividades es de cuatro horas, sin incluir los ejercicios, que se consideran tareas *extra-clase.*

Materiales necesarios

- Computadoras o tablets con navegador de internet moderno (html5), uno por equipo.
- Hojas de trabajo con applets de GeoGebra disponibles en línea.
- Proyector (para utilizar en discusiones grupales)
- Calculadora, lápiz y papel para desarrollo de algunos procedimientos numéricos.

Método o recomendaciones de enseñanza

La propuesta de enseñanza se estructura siguiendo el ciclo de enseñanza de APOE (Arnon et al., 2014, p. 58). Desde el marco APOE se plantea organizar la enseñanza en Actividades, discusión grupal en Clase y Ejercicios (ACE por sus siglas en inglés); de modo que el trabajo individual o en pequeños equipos pueda favorecer el inicio del desarrollo de concepciones mentales específicas,

[1] Universidad de Sonora, México.

mientras que en una discusión grupal se fomente la identificación de las propiedades generales obtenidas al resolver casos distintos, o la posibilidad de modificar los resultados obtenidos o los métodos mismos con los que se obtuvieron. Finalmente, la etapa de ejercicios permite al mismo tiempo reforzar las construcciones realizadas, aplicándolas a nuevos casos, y como un primer instrumento de evaluación, para observar si los estudiantes de manera individual pueden aplicar las concepciones pretendidas.

Se pueden considerar las actividades como dos ciclos ACE; cada uno iniciando con una sección de actividad, en la cual se promueven las estructuras a nivel Acción e inicio de proceso para cada método; después, en la etapa de discusión se abordan nuevos problemas y se promueve la interiorización para terminar de construir el Proceso y avanzar a la etapa de Objeto. Por último, en la sección de ejercicios se busca refinar la construcción de las concepciones, y la evaluación preliminar del desarrollo de las concepciones en términos del desempeño de los estudiantes al resolver problemas.

Para facilitar la implementación de las secuencias, y como elemento fundamental por sus características dinámicas y la inclusión de un lenguaje elemental de programación, las actividades se diseñan como hojas de trabajo dinámicas publicadas en la plataforma web de GeoGebra.

Se recomienda organizar equipos pequeños, 3 o 4 integrantes, para facilitar el trabajo con los materiales de GeoGebra, pero al final que se resuelvan los ejercicios de forma individual.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education. doi:10.1007/978-1-4614-7966-6. New York: Springer.

Actividad 1: Método de Bisección

Nombre:____ Grupo:________ Fecha: _______

Miembros del equipo:

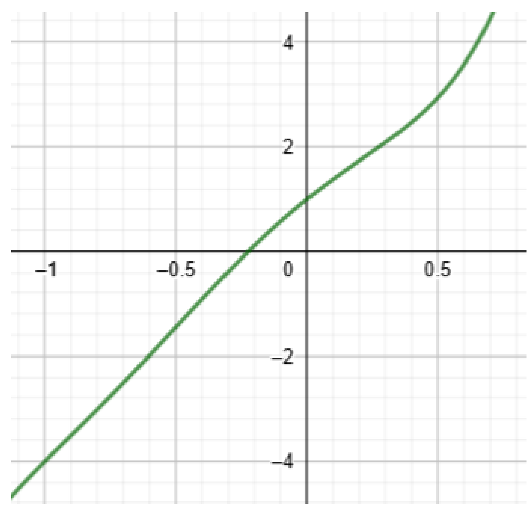
INSTRUCCIONES

Contesta las preguntas y realiza lo que se solicita en cada una de las actividades de tus hojas de trabajo.

Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Bloque 1 Encontrar la raíz de un polinomio (Individual, 10 minutos)

1. Marca en la siguiente gráfica cuál sería la raíz del polinomio
2. Cuál es el valor de la raíz: ____________
3. ¿Podrías encontrar el valor exacto o al menos con 3 decimales? Explica cómo o por que no es posible:



4. En el applet 1 se tiene la gráfica del mismo polinomio, usa la herramienta *aproximar* para buscar el valor de la raíz con tres decimales de precisión. Escribe el valor encontrado:

r = _______

5. Escribe instrucciones paso por paso para que otro compañero pueda usarla herramienta aproximar y encontrar el valor de la raíz como tú lo hiciste.

Bloque 2 (Equipo, 10 minutos)

1. Del bloque anterior, seleccionen las instrucciones más precisas que haya escrito algún miembro del equipo.
   Cada equipo enviará el instructivo seleccionado a otro equipo y a su vez recibirá un instructivo de otro equipo para la misma tarea.
2. Con el instructivo recibido, usando el mismo applet 1, sigue las instrucciones al pie de la letra, *sin agregar, quitar, ni modificar los pasos,* y expliquen si funcionaron o no para llegar al valor de la raíz con 3 decimales.

3. ¿Le hizo falta considerar algo importante o sobraron pasos en el instructivo del otro equipo? Expliquen aquí:

4. ¿Corregirían algo de su propio instructivo? Expliquen aquí:

5. ¿Con cuál instructivo se llega más rápido a la raíz?

Actividad 2: Mejorar el método con GeoGebra

Nombre:____ Grupo:__________ Fecha: _________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Los métodos desarrollados en la actividad anterior deben compartir algunas características, conservaremos las siguientes y las convertiremos en procedimientos numéricos a realizar en GeoGebra:

1. Identificar un intervalo que contiene a la raíz
2. Acercarse en el punto medio del intervalo
3. Decidir si la raíz está en la mitad, a la izquierda o a la derecha
4. Definir un nuevo intervalo y repetir

En el applet 2-1, elige un polinomio de grado 5 que tenga una raíz real positiva, modificando la fórmula:

a_5 debe ser distinto de cero

Se aproximará el valor de esa raíz positiva r con 4 decimales.

Llena la tabla con los valores de a, b y r de cada iteración del método de bisección.

Itera el método hasta que se cumpla p(r)<.0001

Bloque 1: Aproximación manual (Equipo, 30 minutos)

1. Escribe el polinomio que elegiste y el valor de la raíz aproximada

2. Describe paso a paso las instrucciones que le darías a GeoGebra para que realice las aproximaciones:

Bloque 2: Automático de uno en uno (Equipo, 30 minutos)

INSTRUCCIONES

En el applet 2-2 se creará un botón que realice los mismos pasos que realizamos en la actividad anterior, repitiendo un renglón a la vez.

1. Presiona el botón [Cambiar Polinomio] hasta obtener un polinomio con al menos dos raíces reales.
2. Ubica en la gráfica una posible raíz, r, anota el valor que parece tener en la barra de entrada, si parece estar en 0.5:

$$\boxed{r = 0.5}$$

3. Comprueba si r es raíz, evaluando p en r:

$$\boxed{pr=p(r)}$$

   si pr=0, encontraste la raíz exacta.
4. Crea un número a cercano y la izquierda de la posible raíz, si la posible raíz es 0.5:

$$\boxed{a=0.4}$$

5. Para ver el número en la vista gráfica, crea el punto en el eje X:

$$\boxed{A=(a,0)}$$

6. Crea un número b cercano y la derecha de la posible raíz, si la posible raíz es 0.5:

$$\boxed{b=0.6}$$

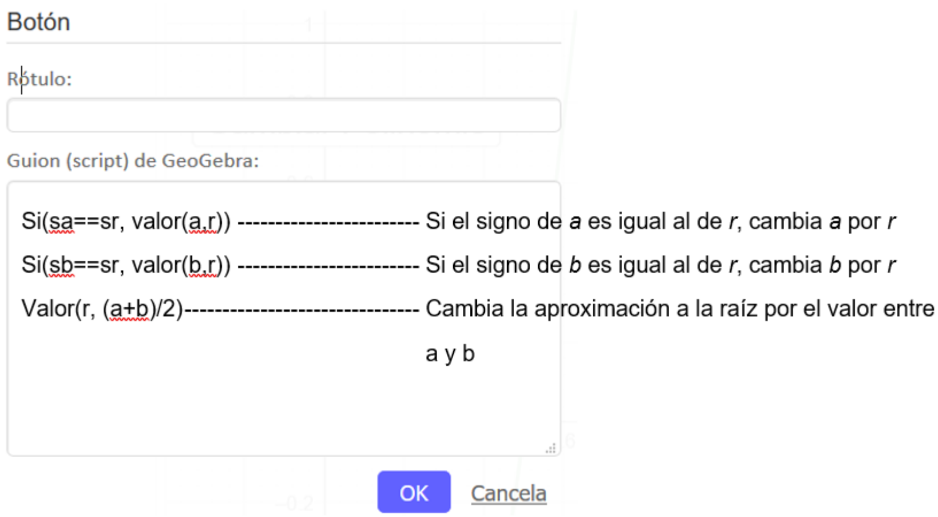
7. Para ver el número en la vista gráfica, crea el punto en el eje X:

$$\boxed{B=(b,0)}$$

8. Comprueba que hay una raíz entre esos dos números, comparando el signo del polinomio en ellos

$$\boxed{\begin{array}{c} sa= sgn(p(a)) \\ sb= sgn(p(b)) \\ sr= sgn(p(r)) \end{array}}$$

9. Crea un botón para que GeoGebra calcule la bisección del intervalo (a, b) y decida en qué lado está la raíz Ingresa las siguientes líneas en el script del botón OK:



10. Escribe el polinomio que obtuviste

11. ¿Cuántos clicks se necesitan para que el valor de pr<0?0001 (sin contar el signo)?

12. ¿Cuál es el valor final de r?

13. Prueba que el botón funcione para aproximar otra raíz del mismo polinomio, escribe aquí:
    a. primera aproximación de la nueva raíz
    b. cantidad de clicks para llegar a la raíz con p(r)<.0001

Actividad 3: Automatizar el método

Nombre:____ Grupo:__________ Fecha: ________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Ahora que logramos que GeoGebra realice la aproximación un paso a la vez, agregaremos a la construcción un nuevo botón que repita la aproximación varias veces, para acercarse más rápido a la raíz de los polinomios.

Sobre la construcción anterior, se añadirán nuevos elementos. Antes de iniciar esta sección, debes tener:

polinomio *p(x)*

números *a, b, n, r, sa, sb, sr*

Puntos *A, B, R*

Botón para *bisección manual*, un paso a la vez

Bloque 1: Bisección repetida k veces (Equipo, 10 minutos)

En el applet 3-1 crearemos un botón que aplique la misma acción, pero ahora K veces.

1. Crea un número entero, k, con un valor entero relativamente alto

k=50

2. Crea un segundo botón para que GeoGebra aplique las instrucciones del primer botón k veces, con el guion:

Repite(k, EjecutaAlClic(botón1))

El primer botón debe llevar de nombre "botón1"

3. Según la fórmula ¿Cuál debería ser la raíz diferente de cero?
4. ¿A las cuántas repeticiones se obtendría el valor exacto de pi?

Bloque 2: comprobar el funcionamiento de la construcción

1. Redefine el polinomio p con la siguiente entrada:

$$p(x) = x^5 + 4x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 8$$

2. ¿Cuál es el valor de la raíz negativa?

3. ¿Cuántos clicks se necesitaron para aproximar la raíz?

4. Vuelve a aproximar la raíz negativa con valores iniciales de a=-3, b=0

¿Por qué crees que GeoGebra deja de aproximar el valor de la raíz antes de llegar a r=2?

5. Intenta aproximar la raíz positiva, describe qué pasa cuando usas el botón:

6. ¿Por qué crees que este método sólo encuentra raíces de multiplicidad impar?

Bloque 3: Cálculo de raíces pares

Para calcular las raíces de multiplicidad par, hay que complementar la construcción usando la relación entre un polinomio y su derivada.

Si r es una raíz de multiplicidad par de p(x), entonces también es raíz de la derivada p'(x).

1. ¿Las raíces pares de p(x), son pares o impares de p'(x)?

Usando la respuesta anterior, si encontramos las raíces impares de *p'(x)* estaríamos encontrando las raíces pares de *p(x)*. En el applet 3-2 Crearemos un segundo botón para aproximar estas otras raíces, pero primero:

2. Crea la derivada de p, escribiendo directamente en la barra de entrada: p'
3. Crea los números equivalentes a los signos de *a, b* y *r,* para *p'(x):*

   sa2= sgn(p'(a))

sb2= sgn(p'(b))

sr2= sgn(p'(r))

4. Crea el nuevo botón para aproximar raíces pares, con el guión:

   Valor[r,(a+b)/2]

   Si[sa2==sr2, Valor[a,r]]

   Si[sb2==sr2, Valor[b,r]]

Este tercer botón, por default se llamará *botón3* Ahora puedes crear un cuarto botón que aplique K repeticiones del *botón3*

5. Crea el botón k bisecciones pares con el siguiente guión:

   Repite(k, EjecutaAlClic(botón3))

Bloque 4: Ejercicios

El archivo construido hasta este paso te debe permitir aproximar todas las raíces reales positivas y negativas. Para comprobarlo, factoriza (lo más posible) los siguientes polinomios.

1) $p(x) = x^6 - 0.091x^5 + 2.693x^4 + 3.006x^3 - 3.213x^2 - 2.761x$

2) $p(x) = x^6 - 3.821x^5 + 9.342x^4 - 15.218x^3 + 11.543x^2 - 1.573x - 1.276$

¿Qué limitaciones o debilidades consideras que tiene este método de aproximación de raíces?

Actividad 4: Método de Newton-Raphson

Nombre:____ Grupo:__________ Fecha: _________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

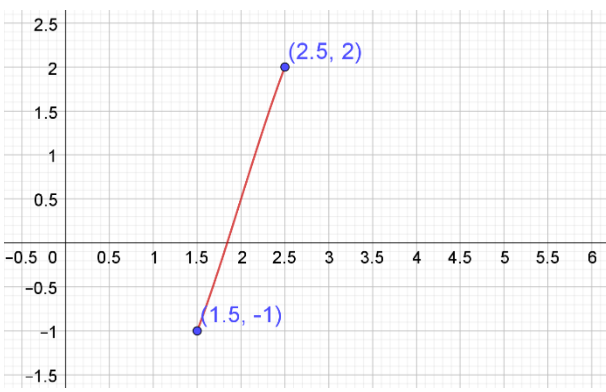
Contesta las preguntas y realiza lo que se solicita en cada una de las actividades de tus hojas de trabajo.

Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Bloque 1 Sería más fácil si el problema fuera lineal

En las actividades anteriores se completó un método para aproximar las raíces reales de un polinomio cualquiera, regresaremos un poco a comparar el problema con un caso más simple: una función lineal.

1. Para la siguiente función, suponiendo que es lineal, ¿cuál sería el valor de la raíz real?



Procedimiento:

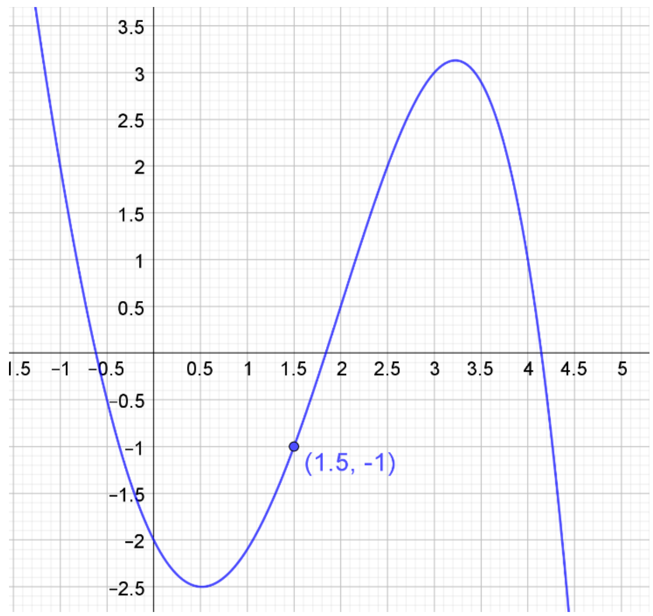
La gráfica anterior en realidad es parte de la gráfica de un polinomio de grado 4:

$$p(x) = -\frac{1}{15}x^4 - \frac{1}{15}x^3 + \frac{121}{60}x^2 - \frac{119}{60}x - 2$$

2. Utiliza la fórmula de *p(x)* para confirmar qué tan cerca está el valor encontrado de ser la raíz del polinomio. Escribe tu procedimiento:

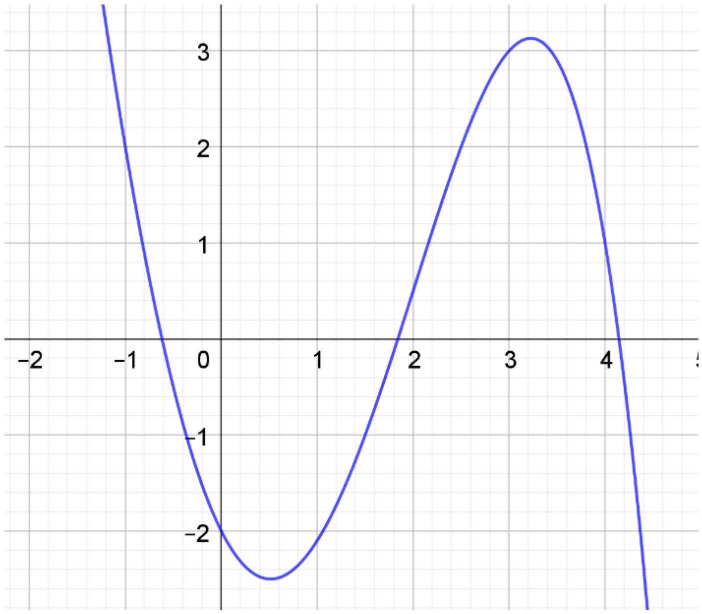
3. A continuación, se muestra una parte más representativa de la gráfica de *p(x)*, ¿Podríamos obtener una aproximación igual de cercana a la anterior si hubiéramos empezado con una recta que pasara por otros dos puntos del polinomio?

4. Escoge un segundo punto, con coordenada *x>3* y grafica la recta que pasa desde *(1.5,-1)* al punto que seleccionaste.



5. Para esta nueva recta, calcula la intersección con el eje X y utiliza la fórmula de *p(x)* para evaluar qué tan cerca está el valor encontrado de ser raíz de p.

6. Apóyate en los resultados anteriores para utilizar una recta que te aproxime al valor de la raíz negativa del polinomio:



Actividad 5: Mejorar el método con GeoGebra

Nombre:____ Grupo:__________ Fecha: _________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

En la actividad anterior se pudo observar que, iniciando con una recta apropiada, podemos aproximar bastante el valor de una raíz real, esta es la idea fundamental del método de Newton-Raphson.

A continuación, utilizaremos el resultado del curso de cálculo, sobre la relación entre una función, su derivada y sus rectas tangentes.

Bloque 1: Aproximar con recta tangente

Utilizaremos el applet 5-1 para aproximar las raíces reales de polinomios, a partir de encontrar una recta tangente *apropiada*.

En el applet puedes arrastrar un valor en el eje X, r_0, y con ello se actualizarán las posiciones de:

- El punto en el polinomio con ese valor de *x*
- La recta tangente al polinomio que pasa por ese punto

1. Para el polinomio inicial mostrado en el applet, ¿cuál sería un valor apropiado de r_0 para aproximar la raíz positiva con un decimal de precisión?

Manipula r_0 en el applet y escribe aquí tu respuesta:

2. Utilizando la fórmula de *p(x)* y la relación con su derivada, obtén la fórmula de la recta tangente que seleccionaste, nota que tienes un punto de la recta y puedes obtener su pendiente:

3. Con el método de la actividad anterior, obtén el valor aproximado de la raíz real:

4. Utilizando la fórmula del polinomio, tomando r_1 como el valor aproximado a la raíz, ¿qué valor se obtiene de $p(r_1)$?

Tomaremos ese valor como el *error de la aproximación.*

5. Cambia el valor de r_0 al valor de r_1 y repite el procedimiento de 2, 3 y 4:

6. ¿Cómo cambió el error al repetir el procedimiento con el nuevo valor inicial?

7. Si continuáramos repitiendo el cambio de r_0 al valor de r_1, ¿cuántas repeticiones crees que necesitaríamos para llegar a un error <0.00001?

Bloque 2: Mejorar el método con GeoGebra

INSTRUCCIONES

A partir de la fórmula de la recta tangente en un punto del polinomio, se obtuvo una fórmula para aproximar las raíces de polinomios.

Utiliza la fórmula obtenida para aproximar las tres raíces del polinomio que se muestra en el applet 5-2.

Se puede observar en la gráfica que una raíz es doble, por lo que:

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)^2(x - x_3)$$

Empezaremos aproximando la raíz negativa y en todos los casos, se considera un error aceptable cuando es menor que .0001

1. Registra en la tabla del applet 5-1 cada repetición del método, anotando los valores de r_0, r_1 y el *error* obtenido.
2. ¿En cuántas iteraciones, empezando en -4, se llega a la raíz x_1?
3. Cambia el valor de r0 a -1.2 ¿A cuál raíz se aproximan las iteraciones del método?
4. ¿Qué valor puede tomar r_0 para aproximar la segunda raíz x_2?
5. Explica qué pasa con el método de Newton al aplicarlo con el valor de r0=-1.0088
6. ¿Qué relación tiene la respuesta anterior con la derivada?
7. ¿En qué orden aparece la segunda raíz de $p(x)$ con respecto a las raíces de la derivada del polinomio?
8. ¿En qué posición necesita estar r_0 para que el método nos lleve a la tercera raíz?
9. ¿Qué relación tiene la respuesta anterior con la derivada?

10. ¿Se puede usar el método de Newton-Raphson para aproximar todas las raíces reales de un polinomio? Explica cómo o por qué no

Actividad 6: Automatizar el método con GeoGebra

Nombre:______________________________ Grupo:__________ Fecha: ________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

En esta actividad se automatizará la ejecución del método de Newton-Raphson para aproximar las raíces de un polinomio.

Iniciaremos construyendo un botón que al presionarlo indique a GeoGebra que realice todos los pasos que hicimos en la actividad anterior para aproximarse a una raíz del polinomio.

De tal manera, necesitamos:

**Un valor inicial de la posible raíz: r0*

** La secuencia de operaciones algebraicas que se aplicarían a r0 para obtener una mejor aproximación a la raíz: r1*

Posteriormente, se podrá construir un botón que repita el método tantas veces sea necesario, por lo que necesitaremos:

**Una manera de decidir cuándo dejar de aplicar el método, ya que estamos suficientemente cerca de la raíz buscada.*

Bloque 1: Instrucciones para aplicar el método

Aprovecharemos que GeoGebra permite definir acciones dentro de botones usando una forma de escribir similar a la de la clase de matemáticas.

Para iniciar, necesitamos las operaciones que se aplican a r0 para llegar a r1 de forma algebraica.

En el siguiente applet, 6-1, se tiene la misma construcción de la actividad anterior, para que recuperes la fórmula que permite obtener r1 desde r0.

Recordando que la pendiente de la recta tangente se obtiene con la derivada del polinomio.

1. ¿Cómo se puede escribir el valor de r1 en términos del valor de r0?

2. Elige dos valores distintos de r0 y comprueba que la fórmula escrita arriba genera el mismo resultado que el método aplicado gráficamente.
   Escribe aquí los valores de r0 y r1:

Ahora utilizaremos la herramienta de botón (aparece como OK en la barra de herramientas) para que GeoGebra realice las operaciones.

Dentro de un botón hay que utilizar comandos para indicarle qué hacer a GeoGebra. Como lo que queremos hacer es cambiar el valor de r0 por un valor más cercano a la raíz, utilizaremos el comando:

valor(nombre de objeto, nuevo valor)

Por ejemplo, si quisiéramos que el nuevo valor de r0 sea el doble de lo que ahora vale, escribiríamos:

*valor(r0, 2*r0)*

3. ¿Cuál debería ser el nuevo valor de r0 para aproximarse a la raíz? Escribe tu respuesta como un comando valor(nombre, nuevo valor)

Ya que tengamos bien definido el comando que se quiere utilizar dentro del botón, se aplica la herramienta *[botón]* desde la barra de herramientas.

Hay que indicar en qué parte de la vista gráfica se quiere ubicar el botón, haciendo clic con el mouse, y luego aparece una ventana donde se introduce el texto que aparecerá como etiqueta del botón y los comandos que el botón ejecutará con cada clic.

Al presionar el botón GeoGebra debería cambiar la posición de r0 por la de r1.

Registra en la tabla los valores que r0 para aproximar la primera raíz del polinomio (x1) con 4 decimales de precisión (error < 0001).

4. ¿El botón lleva a la misma solución que el método gráfico manual?

Explica por qué

Utiliza el mismo botón para aproximar las otras dos raíces y registra cada paso en la tabla de la derecha.

5. Escribe aquí en qué valor empezaste la aproximación de cada raíz y cuántos clics fueron necesarios para llegar a la raíz aproximada.

Bloque 2: Automatizar k-repeticiones

INSTRUCCIONES

A partir de la construcción anterior, se obtendrá de manera más eficiente la aproximación de raíces y puntos críticos.

En esta construcción, se automatizará la repetición del método de dos formas

Repitiendo una cantidad fija de veces

Hasta tener el "error" deseado

El applet inicia con el botón construido previamente y tiene nombre "botón1" (el nombre del botón no necesita coincidir con el texto que se ve en el botón)

Para mayor rapidez en los cálculos, sólo se definió:

polinomio p

número r

El botón1 [Raíz - 1 repetición] ejecuta el siguiente comando:

Valor(r, r-p(r)/p'(r))

Bloque 1: Comprobar primer botón

Abre el applet 6-2 y comprueba el funcionamiento del botón1.

1. ¿El botón aproxima correctamente las raíces?
   Escribe aquí la aproximación de las raíces del polinomio y cuántos clics se necesitaron para llegar a ellas

Bloque 2: Repetir una cantidad fija de repeticiones

Para lograr esto usaremos el comando: *Repite(cantidad, comando)*.

El comando que queremos aplicar es el que lleva dentro con la etiqueta [Raíz - 1 repetición], es importante no confundir el nombre del botón con la etiqueta del botón. En este caso el botón que lleva la etiqueta *[Raíz - 1 repetición]* tiene por nombre "*botón1*".

Para no tener que volver a escribir el comando que usamos en el botón de una repetición, podemos pedirle a GeoGebra que lo ejecute usando el nombre del botón. Como este es el comando que se activa al hacer clic en el botón, GeoGebra lo reconoce como :

EjecutaAlClic(botón1)

Entonces, si queremos que GeoGebra repita 3 veces ese comando, escribiríamos:

Repite(3, EjecutaAlClic(botón1))

Según la cantidad de clics que usaste para encontrar las raíces arriba,

1. ¿Cuál sería una cantidad apropiada de clics para que funcione con cualquier raíz?

2. Crea un botón que repita el método la cantidad de veces que elegiste El comando debería ser del tipo:

Repite(#, EjecutaAlClic(botón1))

Reemplazando # por el número que elegiste La etiqueta de ese botón debe llevar el número de repeticiones, como [repetir # veces]

3. ¿La cantidad que elegiste funciona si el valor de x inicia en -1000? Compruébalo en el applet

Si la cantidad de clics depende de qué tan cerca o lejos empecemos de las raíces, podríamos hacer que con el mismo botón, se aplique una cantidad variable k veces la repetición.

4. ¿Cómo cambiaría el comando para que se repita k veces?

Bloque 3: Ejercicios

En el mismo applet 6-2, cambia el polinomio por uno de grado 6 que tenga al menos 3 raíces diferentes.

1. Escribe la fórmula del polinomio
2. Usa el botón con k repeticiones para buscar las raíces, iniciando para cada raíz en el número entero más cercano a la raíz.
3. Escribe aquí en qué valor iniciaste la aproximación para cada raíz y cuántas repeticiones se necesitaron

4. Escribe la fórmula factorizada aproximada del polinomio

5. Comprueba que la fórmula aproximada es correcta, comparando las gráficas

Capítulo 10: Situación 1: Estimando la temperatura

Secuencia didáctica

María Antonieta Rodríguez Ibarra[1], Gisela Montiel Espinosa[2].

Problemática y propósitos de aprendizaje

Que los y las profesoras participantes realicen estimaciones acerca de las temperaturas entre dos ciudades a fin de promover el análisis e interpretación geométrica del Teorema de Tales.

Conceptos matemáticos involucrados

Generales: Visualización, estimación, representaciones aritméticas y geométricas.

Específicos: Teorema de Tales, proporcionalidad.

Nivel de estudios

Profesores de matemáticas de secundaria.

Total de actividades y duración aproximada

La situación se divide en tres etapas (inicio, desarrollo y cierre) con una duración aproximada de 2 horas

Materiales necesarios

- Hojas de trabajo para cada profesor o profesora participante
- Mapa impreso de la región, regla, termómetro impreso en papel acetato y broche de dos puntas o latonado (Anexo 1)
- Una computadora con GeoGebra para cada profesor o profesora participante. El applet se diseñó en GeoGebra clásico, versión 5
- Applet de GeoGebra para la pregunta 13
- Proyector (para utilizar en discusiones grupales)

Método o recomendaciones de enseñanza

La situación se ha dividido en tres etapas de trabajo las cuales se describen a continuación:

Etapa 1: Inicio (preguntas 1-3)

En esta etapa se trata de que los participantes se involucren en el contexto de la situación, conozcan las funciones del Servicio Meteorológico Nacional, quien es el encargado de proporcionar información del estado del clima en México, y reconozcan la importancia de conocerla.

[1] Universidad de Sonora, México.
[2] Cinvestav, México

Etapa 2: Desarrollo (preguntas 4-14)

En esta etapa se espera que los participantes den respuesta a tareas matemáticas poniendo en uso sus conocimientos, que formulen y validen con o sin uso de tecnología conjeturas, que compartan sus resultados con el grupo.

De las preguntas 4-8 se trata de que las y los participantes realicen conjeturas respecto a cómo es la temperatura en algún punto entre las dos ciudades. Se espera que las justificaciones de respuesta de los y las participantes se apoyen en procedimientos aritméticos como el cálculo del promedio de dos magnitudes.

En las preguntas 9 y 10 se promueve que los y las participantes, con base en lo contestado en las preguntas anteriores, establezcan y validen un método para estimar temperaturas y lo compartan de manera grupal.

A partir de la pregunta 11, se sugiere que el facilitador(a), en caso de que los participantes no lo hayan hecho, oriente la discusión a un ambiente geométrico, es decir, invitarles a pensar cómo dar respuesta a la situación de la estimación de temperaturas utilizando herramientas geométricas, para lo cual, se le proporciona a cada participante el material físico (mapa, termómetro y regla) (Anexo 1). Se espera que los y las participantes realicen trazos auxiliares a fin de establecer relaciones geométricas de la situación.

En las preguntas 13 y 14, se trabajará con un applet de GeoGebra, en el cual, las y los participantes podrán ver en pantalla una representación dinámica de la situación trabajada con el material físico. Se busca que a pasar de “arrastrar” los diferentes puntos visibles en el modelo dinámico, se puedan generalizar las relaciones geométricas identificadas en las preguntas 11 y 12, es decir, se puedan detectar las relaciones que permanecen invariantes.

Etapa 3: Cierre (preguntas 15-18)

En esta etapa, se sugiere, si es posible, que todos los participantes presenten el método geométrico para estimar las temperaturas y argumenten por qué funciona. Además, que se compare con el método aritmético propuesto anteriormente. Se sugiere al facilitador que en caso de que no haya surgido en la etapa de Desarrollo, aquí se aborde el Teorema de Tales y se qué relación tiene éste con el modelo geométrico planteado por los participantes.

Consideraciones adicionales: A manera de reflexión para las y los profesores participantes, una vez concluida la situación, se podría promover una discusión centrada en como adaptar la situación para ser trabajada con sus estudiantes.

Etapa 1: Inicio

Nombre:____ Fecha: _________

Contesta las preguntas y realiza lo que se solicita en cada una de las actividades de tus hojas de trabajo.

Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Trabajo individual

Conocer la información climatológica de México es de gran importancia para diferentes sectores de la población. Es a partir de ésta que muchas personas toman diferentes decisiones como: salir o no de viaje, ponerse suéter, salir con paraguas de casa, horarios de clases en las escuelas, aplicación de vacunas, programas y campañas sociales, entre otros.

La Comisión Nacional del Agua (CONAGUA), a través del Servicio Meteorológico Nacional (SMN) son los responsables de proveer pronósticos, alertas e información del estado del tiempo y del clima en nuestro país.

Las principales funciones del SMN son:

- Mantener informado al Sistema Nacional de Protección Civil, de las condiciones meteorológicas que puedan afectar a la población y a sus actividades económicas.
- Difundir al público boletines y avisos de las condiciones del tiempo, especialmente en la época de ciclones, que abarca de mayo a noviembre.
- Realizar estudios climatológicos o meteorológicos.
- Proporcionar al público información meteorológica y climatológica.
- Concentrar, revisar, depurar y ordenar la información, generando el Banco Nacional de Datos Climatológicos, para consulta del público.

1. ¿Consultas información climatológica para la toma de alguna decisión en tu vida?, ¿Cuál?

Para estimar la temperatura, se cuenta con Estaciones Meteorológicas Automáticas (EMAS) ubicadas de manera estratégica por todo el país. Las cuales son un conjunto de dispositivos eléctricos y mecánicos que realizan mediciones de las variables meteorológicas de forma automática (sobre todo en forma numérica). En el caso del estado de Sonora, hay ocho EMAS, ubicadas en Álamos, Caborca, El Pinacate, Hermosillo-Bahía de Kino, Nogales, San Luis Río Colorado, Sonoyta y Yécora.

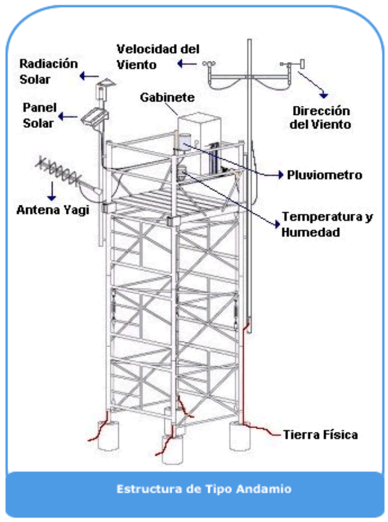


Figura 1: Tipo de estructura donde se montan las estaciones meteorológicas. Disponible en http://smn.cna.gob.mx/es/emas

2. ¿Sabes cómo los meteorólogos estiman la temperatura de un lugar que no esté cerca de alguna EMAS?

3. Si conocemos la temperatura de dos ciudades ¿Cómo será la temperatura en un lugar que esté entre ellos? ¿Podría cambiar de manera drástica? ¿Qué información necesitamos para estimar la temperatura de este lugar?

Etapa 2: Desarrollo

Nombre:____ Fecha: _________

4. Si sabemos que la temperatura en Guaymas es 27° y en Hermosillo es 32° ¿Cuál será la temperatura en un punto a la mitad del camino? Justifica tu respuesta
   Puedes usar el siguiente mapa para ubicarte

5. ¿y a la cuarta parte del camino?

6. ¿y a la tercer parte?

7. ¿Utilizaste el mismo procedimiento para estimar la temperatura en todos las casos? De ser así, descríbelo

8. Se toma la temperatura en un punto entre Hermosillo y Guaymas y el termómetro registra 30° ¿A qué distancia aproximadamente se hizo la toma?

9. De manera general, conocidas las temperaturas de Hermosillo y Guaymas, cómo le podrías explicar a alguien cómo estimar la temperatura de un punto que esté entre las dos ciudades.

10. ¿Cómo podrías validar o argumentar que el método descrito en la pregunta anterior funciona?

Hasta el momento hemos trabajado con herramientas aritméticas para resolver los cuestionamientos previos. ¿Podremos construir un modelo geométrico que nos ayude a estimar temperaturas?

11. ¿Cómo podrías utilizar el material que se te ha proporcionado (mapa, termómetro y regla) para estimar las temperaturas?

Trabajo grupal

12. Compara tu respuesta a la pregunta 11 con los demás profesores participantes y escribe si hay diferencias entre el cómo se usó el material.

Situación 1: Estimando la temperatura

Trabajo con GeoGebra

INSTRUCCIONES

Descargar el archivo Estimando la temperatura.ggb. En este applet podrán "arrastrar" los puntos P, T y A y observar los cambios que se producen

13. Describe lo que ves en la pantalla

14. Completa la siguiente tabla a partir de lo que observas en pantalla

Punto	¿Qué representa?
P	

T	
A	

15. Cuando “arrastramos” el punto A, ¿qué cambia?

Etapa 3: Cierre

Nombre:____ Fecha: _________

16. Conocidas las temperaturas de dos lugares, describe un método geométrico para estimar la temperatura de un lugar que esté entre ellos.

17. Explica por qué el modelo anterior funciona

Trabajo grupal

18. Compara tu método y la explicación con el del resto de participantes, ¿hubo consenso o alguien presentó un método distintito? De ser así, descríbelo

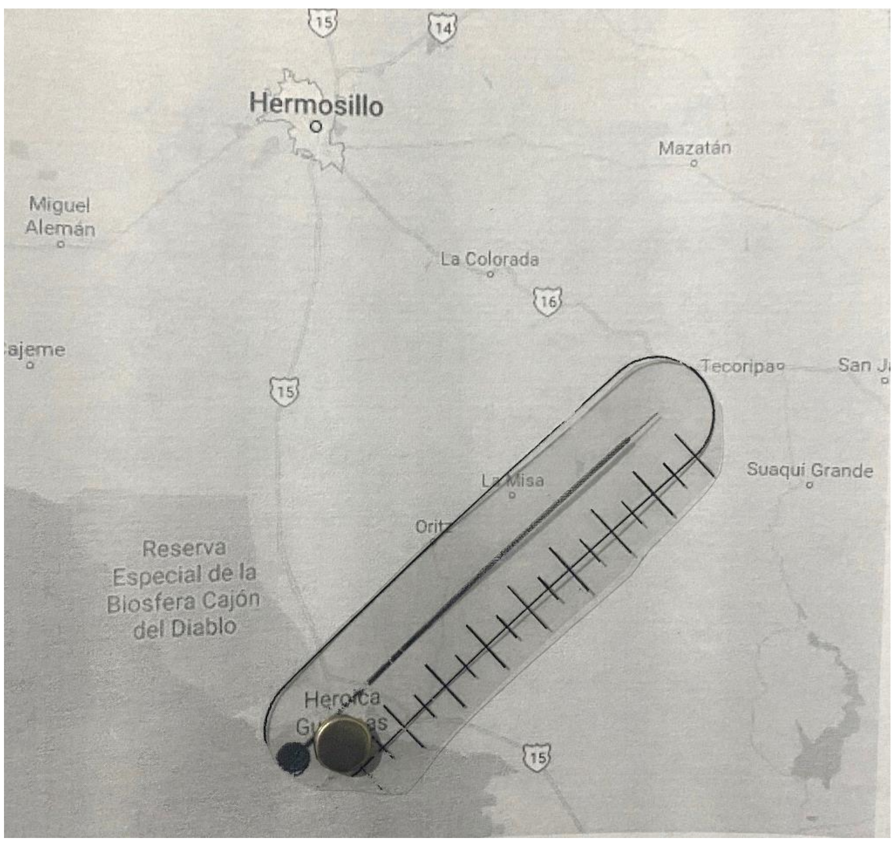
19. Si comparamos el método para estimar temperaturas presentado en la pregunta 9 con el de la pregunta 16, ¿cuáles son sus diferencias?, ¿consideras que uno es mejor que otro? Argumenta tu respuesta

Anexo 1: Material físico utilizado en la situación 1

Materiales:

1. Mapa
2. Termómetro en hoja acetato
3. Broche de dos puntas o latonado
4. Regla

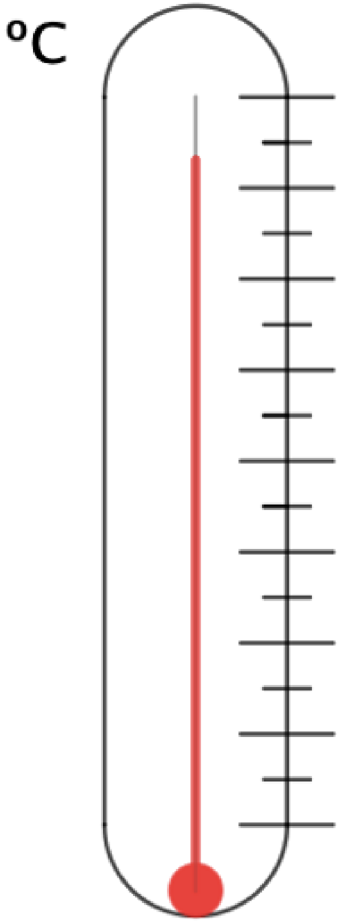
La construcción utilizada en la situación debe verse así:



Situación 1: Estimando la temperatura

1.Mapa

2. Termómetro para impresión en hoja acetato



3. Broche de dos puntas o latonado

Capítulo 11: Antenas telefónicas

Secuencia didáctica

María Antonieta Rodríguez Ibarra[3], Gisela Montiel Espinosa[4].

Problemática y propósitos de aprendizaje

Que los y las profesoras participantes enriquezcan el significado de la mediatriz a partir de su construcción y análisis.

Conceptos matemáticos involucrados

Generales: Visualización, estimación, representaciones aritméticas y geométricas.

Específicos: Mediatriz, distancias.

Nivel de estudios

Profesores de matemáticas de secundaria.

Total de actividades y duración aproximada

La situación se divide en tres etapas (inicio, desarrollo y cierre) con una duración aproximada de 2 horas

Materiales necesarios

- Hojas de trabajo para cada profesor o profesora participante
- Mapa impreso de la región, juego geométrico, lapices de colores
- Una computadora con GeoGebra para cada profesor o profesora participante. Los applets se diseñaron en GeoGebra clásico, versión 5
- Applets de GeoGebra para las preguntas 9 y 10
- Proyector (para utilizar en discusiones grupales)

Método o recomendaciones de enseñanza

La situación se ha dividido en tres etapas de trabajo las cuales se describen a continuación:

Etapa 1: Inicio (preguntas 1-3)

En esta etapa se trata de que los y las participantes se involucren en el contexto de la situación, que relacionen las antenas telefónicas descritas en la situación con las que han visto en su entorno e iniciar con la discusión respecto a el cómo se distribuyen por la ciudad.

Etapa 2: Desarrollo (preguntas 4-12)

[3] Universidad de Sonora, México.
[4] Cinvestav, México

En esta etapa se espera que los participantes den respuesta a tareas matemáticas poniendo en uso sus conocimientos, que formulen y validen con o sin uso de tecnología conjeturas, que compartan sus resultados con el grupo.

De las preguntas 4 a la 8 se trata de que las y los participantes trabajen sobre el mapa de papel, haciendo divisiones en regiones dependiendo del número de antenas y las coberturas de éstas. Se espera que los participantes usen el concepto de distancia para hacer las divisiones. Se busca orientar la discusión a que se identifiquen aquellas ubicaciones del mapa que están a la misma distancia entre antenas.

Es importante promover en esta etapa y antes del uso de GeoGebrael trabajo grupal, permitiendo que cada participante presente la división del mapa a fin de comparar y enriquecer la discusión.

En la pregunta 9 se trabajará con un applet de GeoGebra, en donde en pantalla verán el mapa con antenas trabajado anteriormente con la finalidad de que exploren y utilicen las distintas herramientas del software para validar sus respuestas previas.

En la pregunta 10, se trabajará con un applet de GeoGebra, donde será visible la división de regiones, se podrá manipular el número y la posición de las antenas. A partir de la exploración y discusión se espera (en caso de que los participantes no lo hayan mencionado antes) que surja el concepto de mediatriz como lugar geométrico clave para la división de regiones

Etapa 3: Cierre (preguntas 13-17)

En esta etapa de la actividad se espera que las y los participantes puedan hacer conjeturas o conclusiones respecto a cómo se hace la división de regiones dependiendo del número de antenas y poniendo de manifiesto las propiedades geométricas de la mediatriz. Es importante mencionar que el tipo de argumentos que se esperan pueden ser intuitivos y vinculados a la experiencia con el trabajo con los applets de la etapa de desarrollo.

Consideraciones adicionales: A manera de reflexión para las y los profesores participantes, una vez concluida la situación, se podría promover una discusión centrada en como adaptar la situación para ser trabajada con sus estudiantes o en qué otros contextos se pueden abordar lo trabajado en la situación.

Etapa 1: Inicio

Nombre:____ Fecha: ________

Contesta las preguntas y realiza lo que se solicita en cada una de las actividades de tus hojas de trabajo.

Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Trabajo individual

Distintas compañías telefónicas, cómo parte de sus campañas publicitarias afirman tener cobertura en todo el territorio mexicano, por lo que es cada vez más común ver instalaciones de antenas de telefonía móvil en ciudades y caminos. ¿Sabes cuántas antenas hay instaladas en la ciudad de Hermosillo?, ¿cuál antena es la que proporciona el servicio cuando usas tu celular? Este tipo de cuestionamientos abordaremos en la siguiente actividad

Imagen de antenas satelitales. Tomada de: https://www.xataka.com.mx/telecomunicaciones/es-oficial-telcel-tambien-compartira-su-red-con-los-usuarios-de-at-t

1. ¿Has visto este tipo de antenas en la ciudad?, ¿dónde?

2. ¿Qué criterio o consideraciones crees que toman las compañías telefónicas para la distribución e instalación de las antenas a fin de garantizar la mayor cobertura?

3. En la Figura 1 se muestra la ubicación de dos antenas telefónicas,

    a) ¿cuál antena (A1, A2) consideras que reciba la señal de un usuario que esté en el punto C?

    b) Explica que consideraciones tomaste para decidir qué antena

Trabajo grupal

    c) Comparte tu explicación con el resto de los participantes, ¿hubo diferencias en sus resultados o explicaciones? Describe

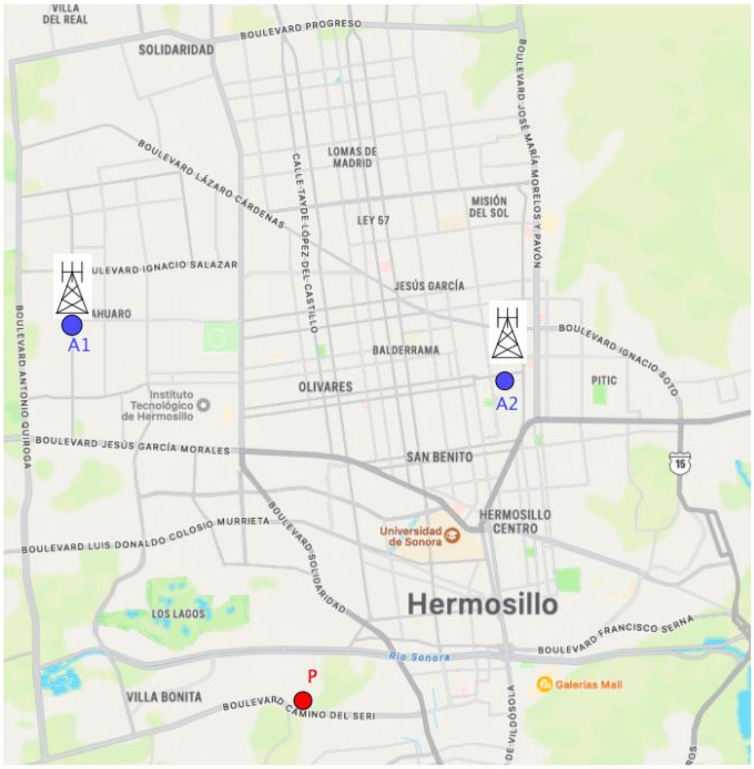


Figura 1. Mapa parcial de Hermosillo con la ubicación de dos antenas

Etapa 2: Desarrollo

Nombre:____ Fecha: _________

4. Marca en el mapa la región que consideres que le corresponde a cada una de las antenas, utiliza un color diferente para cada región. Explica qué criterio utilizaste para hacer la división

5. ¿Existen ubicaciones que se encuentren a la misma distancia de las antenas?, ¿Cuáles? Márcalos en el mapa

6. ¿Qué criterio crees que se use en los casos de la pregunta anterior para determinar qué antena recibe la señal?

7. Supongamos ahora que tenemos tres antenas, como se muestra en la Figura 2, ¿cuál crees que reciba la señal del punto P? Explica tu respuesta

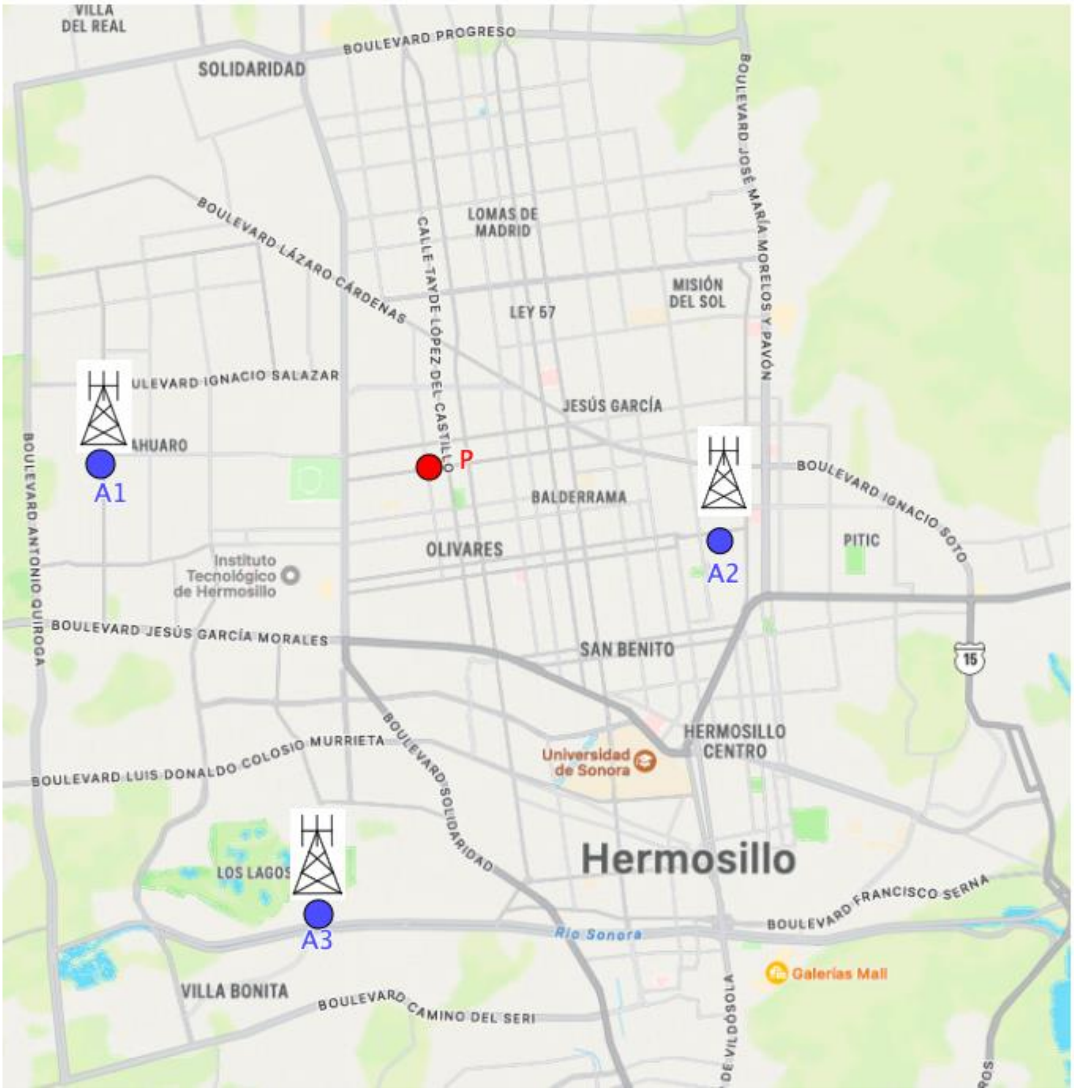


Figura 2. Mapa parcial de Hermosillo con tres antenas telefónicas

8. Marca en el mapa las regiones correspondientes para cada antena, utiliza un color diferente para cada región. Explica cómo es que hiciste la división.

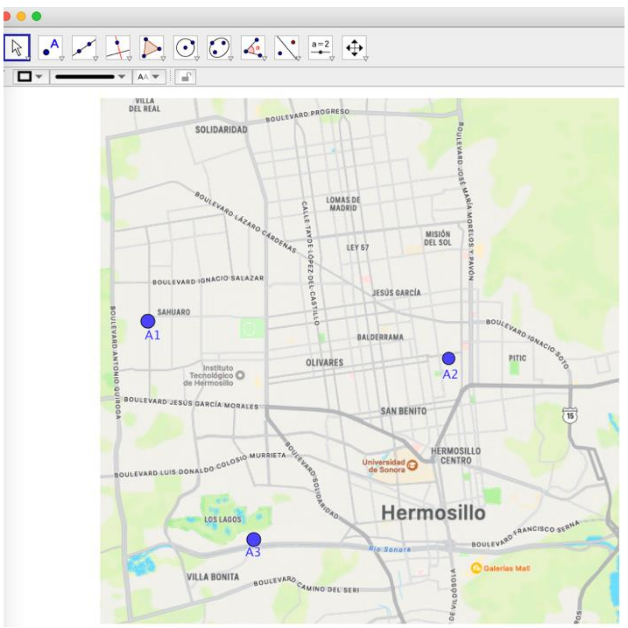
Trabajo grupal

9. Compara el mapa dividido en regiones con el de los demás participantes, ¿hay diferencias? Describe

Trabajo con GeoGebra

INSTRUCCIONES

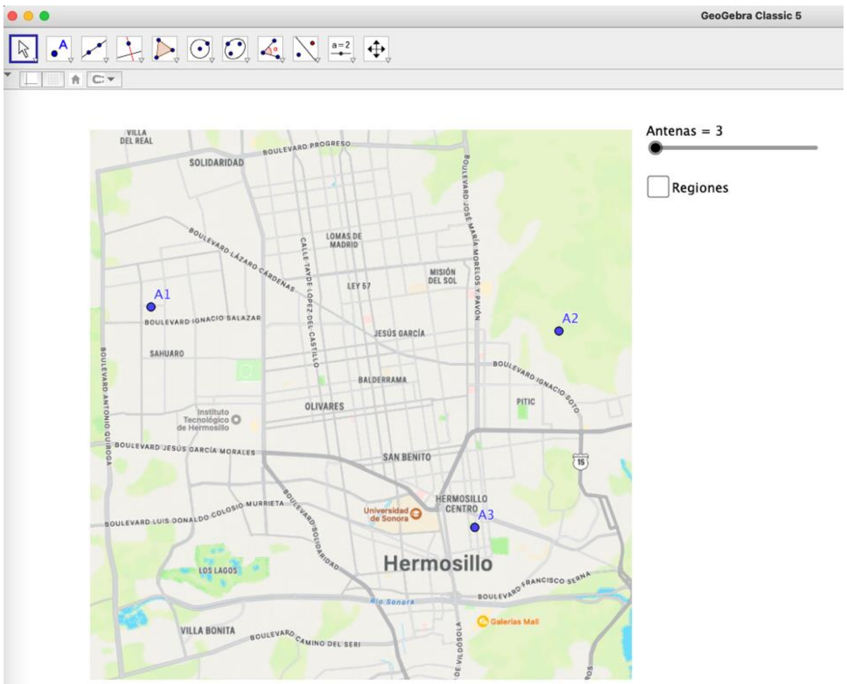
Descargar el archivo antenas.ggb y en pantalla verás la región del mapa con las antenas, explora las diferentes herramientas y úsalas para validar las divisiones realizadas en el mapa (pregunta 7)



10. Describe aquí qué herramientas y cómo las utilizaste para validar tu procedimiento

INSTRUCCIONES

Descargar el archivo Antenas2.ggb. en pantalla podras cambiar el número y ubicación de antenas y activar la casilla de regiones para que sea visible la división,“arrastra” el deslizador y observa como cambian las regiones.



11. ¿La división que aparece en pantalla se corresponde con la que tu realizaste en el mapa de papel para el caso de tres antenas? Explica

12. Cambia la posición de las antenas y observa el comportamiento de las regiones, ¿qué forma geométrica identificas que divide una región de otra?

Etapa 3: Cierre

Nombre:____ Fecha: _________

13. El procedimiento que aplicaste para dividir las regiones considerando tres antenas en la Figura 2, ¿será válido para situaciones donde haya más de tres antenas telefónicas?, ¿por qué?

14. A partir de la manipulación del applet Antenas2.ggb ¿cómo podrías describir el cambio en las regiones cuando el número de antenas aumenta?

15. A partir de la exploración y análisis del archivo de GeoGebra, ¿qué figura geométrica permite dividir en regiones todas las ubicaciones del mapa para asignar la antena correspondiente?

16. ¿Qué propiedades tiene ese lugar geométrico?

17. Escribe como explicarías el procedimiento para dividir por regiones el mapa de Hermosillo a partir de conocer la cantidad y ubicación del número de antenas.

Capítulo 12: Visualización matemática y GeoGebra

Secuencia didáctica

Fernando Hitt[1]

Problemática y propósitos de aprendizaje

Que los estudiantes aprendan a construir estructuras cognitivas que liguen los procesos algebraicos en papel y lápiz, junto con los visuales con la ayuda de un paquete de cómputo como el de GeoGebra y GeoGebra CAS.

Conceptos matemáticos involucrados

Generales: Potencia, polinomios, resolución de ecuaciones, visualización matemática, representaciones gráfica, numérica y algebraica.

Específicos: Resolución de ecuaciones en donde un paquete de cómputo como GeoGebra tiene limitaciones tanto de corte gráfico como resoluición algebraica (GeoGebra CAS); Sin embargo, estas restricciones pueden servir para realizar exploraciones importantes (ligadas a la creatividad en un acercamiento de aprendizaje basado en la indagación) con el paquete, con la finalidad de promover la visualización matemática y una articulación entre los procesos algebraicos y gráficos.

Nivel de estudios

Primer semestre de bachillerato (15 a 16 años) y primer año de universidad (18 a 19 años).

Total de actividades y duración aproximada

Una actividad, para realizarse en dos sesiones de 2 horas (para las primeras 3 etapas de ACODESA). La etapa de autorreflexión se realiza en casa o en otra sesión. La institucionalización se realiza en la 2ª sesión de 15 minutos.

Materiales necesarios

- Hojas de trabajo para cada estudiante,
- Archivo GeoGebra para ayudar exclusivamente al profesor en la fase de institucionalización utilizando el método de enseñanza ACODESA,
- Una computadora con GeoGebra para cada equipo de estudiantes,
- Proyector (para utilizar en discusiones grupales),
- Hojas de papel, bolígrafos de color azul, rojo y verde, para identificar cada una de las etapas de trabajo según el método de enseñanza ACODESA.

Método o recomendaciones de enseñanza

[1] Université du Québec à Montréal, Canada.

Las hojas de trabajo de la actividad se han elaborado siguiendo el método de enseñanza ACODESA (ver Cortés, Hitt & Saboya, 2016) : a) Trabajo individual, b) Trabajo en equipo, c) Trabajo en gran grupo, d) Autorreflexión, y e) Proceso de institucionalización.

Recordemos brevemente que el método ACODESA (ver Hitt y Quiroz, 2019a) tiene un soporte teórico de una teoría sociocultural basada en una perspectiva vigotskiana (Vygotsky, 1932) junto con un acercamiento de la teoría de la actividad de Leontiev (1978). Es aconsejable constituir equipos de 2 o 3 personas y no más (ver por ejemplo las sugerencias de Prusak, Hershkowits & Schwarz, 2013).

Se intenta propiciar en el aula un acercamiento sociocultural del aprendizaje de las matemáticas.

Es usual que los estudiantes inicien ya sea con ideas de utilizar logaritmos para resolver la ecuación. La discusión en equipo y en gran grupo, generalmente implica el abandono de esta estrategia ya que en lugar de simplificar la ecuación, la vuelve más compleja para su solución.

Los alumnos que proponen resolver la ecuación $p(x) = 1$; y/o $q(x) = 0$, generalmente encuentran los valores que GeoGebra también muestra en pantalla; y con el uso de GeoGebra CAS les proporciona el mismo resultado.

No es hasta que se les propone que visualicen las funciones por separado; es decir, las funciones p y q con la ayuda de GeoGebra que los estudiantes se pueden llegar a percatar de la existencia de otras soluciones. Generalmente es en la discusión en gran grupo que el profesor sugiere esta idea.

Es crucial en la discusión en gran grupo, que el profesor guíe la discusión de manera apropiada para que sean los estudiantes quienes construyan el conocimiento de acuerdo con el método ACODESA.

La fase de "Autorreflexión" de acuerdo al método de enseñanza ACODESA (reconstrucción individual de lo realizado en clase), es crucial para que el estudiante asimile lo realizado en clase y se estabilice el conocimiento.

Finalmente, en la fase de "Institucionalización", el profesor podrá utilizar los archivos de GeoGebra que se han proporcionado para esta actividad.

A continuación, presentamos la actividad que se propone para utilizar directamente en el aula.

Referencias

Cortés C., Hitt F. & Saboya M. (2016). Pensamiento aritmético-algebraico a través de un espacio de trabajo matemático en un ambiente de papel, lápiz y tecnología en la escuela secundaria. Bolema Río Claro (SP), 30(54), 240-264.

Hitt, F., and Quiroz, S. (2017). Aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en un medio sociocultural ligado a la teoría de la actividad. Revista Colombiana de Educación. 73, 153-177.

Hitt, F. y Quiroz, S. (2019a). La enseñanza de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico. En S. Quiroz, E. Nuñez, M. Saboya y J. L. Soto (Eds.), Investigaciones teórico prácticas sobre la modelación matemática en un medio tecnológico (pp. 1-25). México : AMIUTEM.

Hitt, F. et Quiroz, S. (2019b). Formation et évolution des représentations fonctionnelles-spontanées à travers un apprentissage socioculturel. *Annales de didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 24, 75-106.

Leontiev, A. (1978). Activity, counciousness, and personality. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

National Council of Teachers of Mathematics. (1988). Can your students of algebra solve this? In *The ideas of algebra, K-12, Yearbook 1998*, NCTM, Reston, VA, USA.

Prusak, N., Hershkowits R. & Schwarz B. (2013). Conceptual learning in a principled design problem solving environment. *Research in Mathematics Education*, 15(3), pp. 266-285.

Vygostky, L. (1932/1962). *Thought and Language.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Visualización matemática y GeoGebra

<table>
<tr>
<td>Nombre del alumno:

____

Nombre de los miembros del equipo:

____

Grupo: ______________

Fecha: _______________</td>
<td><u>Instrucciones</u>:

▪ Para la primera actividad individual, utiliza tinta azul.

▪ Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta, utiliza tinta roja.

▪ En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza tinta verde.

Visualización y resolución de problemas</td>
</tr>
</table>

Situación y trabajo individual (1ª etapa)

1. A continuación se presenta el enunciado siguiente[2]. Encuentre todos los valores reales que satisfagan la ecuación $(x^2 - 5x + 5)^{x^2-9x+20} = 1$.

a) Antes de pasar a un desarrollo algebraico, inicia tu reflexión sobre lo que se te solicita, analizando cuidadosamente los elementos que constituyen la expresión algebraica de manera que te permita construir una estrategia de ataque.

Enunciar la estrategia global de ataque al problema:

b) Una vez que has construido una estrategia, intenta comprender mejor la situación desde un punto de vista gráfico (utiliza GeoGebra). Inicia un proceso de visualización, buscando los elementos clave de la representación gráfica que te puedan ayudar en ese proceso y que te permita ligarlo con la estrategia de ataque.

c) Si la representación gráfica es compleja, es conveniente analizar la expresión algebraica en partes. Por ejemplo, analizar la representación gráfica del polinomio $x^2 - 5x + 5$ y del polinomio $x^2 - 9x + 20$, intentando visualizar los elementos pertinentes, que permitan proporcionarle un sentido visual a la ecuación $(x^2 - 5x + 5)^{x^2-9x+20} = 1$. Este proceso te permitirá construir una estructura cognitiva de control sobre los procesos algebraicos.

[2] Problema del National Council of Teachers of Mathematics. (1988, p. 19). Can your students of algebra solve this? In *The ideas of algebra, K-12, Yearbook 1998*, NCTM, Reston, VA, USA.

Trabajo en equipo (GeoGebra y trabajo papel y bolígrafo con diferente color de tinta) (2ª etapa).

2. Discute con tus compañeros de equipo los resultados que has encontrado en el trabajo individual. ¿El trabajo en equipo proporciona nuevas ideas? ¿Una nueva estrategia de ataque?

3. De acuerdo a la estrategia, resolver algebraicamente lo solicitado.

Trabajo en equipo (GeoGebra y trabajo papel y bolígrafo con diferente color de tinta) (3ª etapa)

4. Discute con tus compañeros de equipo el proceso visual de manera que te permita construir un enunciado similar para la resolución de una ecuación que contenga varias soluciones enteras (no necesariamente todas).

a) ¿Cuál sería su proposición de una nueva ecuación de la forma $(p(x))^{q(x)} = 1$?

b) ¿Qué soporte gráfico podrías proporcionar para mostrar tu construcción de la ecuación? Proporciona una explicación y una evidencia visual utilizando GeoGebra y capturando pantallas para apoyar tu explicación.

c) ¿Cuál es la solución algebraica?

El profesor recoge todas las producciones de los alumnos y proporciona un nuevo cuestionario

4ª Etapa de autorreflexión (reconstrucción individual de lo realizado en clase)

5. En un nuevo cuestionario, resuelve individualmente la misma actividad, y proporciona una ecuación diferente a las encontradas en el trabajo en equipo y en gran grupo de las etapas precedentes.

5ª Etapa proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora

El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las estrategias de resolución de la actividad y explica la importancia de los procesos de visualización (con apoyo tecnológico) para promover la construcción de una estructura de control sobre la actividad matemática en la resolución de problemas del mismo tipo al realizado en esta actividad.

Capítulo 13: Nociones de Aproximación y Tendencia

Actividades didácticas

Sergio Alexander Guarín Amorocho, Sandra Evely Parada Rico, Jorge Enrique Fiallo Lea.[1]

Problemática y propósitos de aprendizaje

El planteamiento de estas actividades tiene como propósito que los estudiantes comprendan las nociones de aproximación y tendencia de manera dinámica, con el fin de lograr un acercamiento a la comprensión del concepto de límite de una función en un punto.

Conceptos matemáticos involucrados

Generales: Aproximación, tendencia, límite de una función en un punto.

Específicos: Variables, razones trigonométricas, circunferencia, representación de funciones, ecuación de la recta.

Nivel de estudios

Último grado de bachillerato y primer semestre universitario (16 a 17 años).

Total de actividades y duración aproximada

5 actividades, para realizarse en un total de 2 sesiones de 90 minutos cada una.

Materiales necesarios

- Hojas de trabajo para cada estudiante.
- Applet de GeoGebra para las actividades 2 y 3.
- Un equipo de cómputo con GeoGebra para cada estudiante. Los applets se diseñaron en GeoGebra clásico, versión 5.

Método o recomendaciones de enseñanza

El diseño de las actividades toma como referencia los aspectos metodológicos planteados por Fiallo y Parada (2018). Las actividades están organizadas secuencialmente, alrededor de uno o dos problemas. La secuencia promueve el trabajo individual, el trabajo en equipo y el debate en el aula, al igual que la manipulación de medios computacionales con el trabajo realizado a lápiz y papel. La secuencia de actividades presenta una estructura intencional que responde a las siguientes fases: exploración libre, socialización de los resultados obtenidos, exploración dirigida, explicación y por último una tarea retadora. Dichas fases se evidencian en el planteamiento de cada actividad:

- **Actividad 1 (**Información y exploración libre**):** Esta actividad tiene como objetivo identificar la comprensión del estudiante acerca de la noción de aproximación, allí el

[1] Universidad Industrial de Santander, Colombia.

estudiante utiliza sus pre saberes y de manera intuitiva busca resolver el problema (tiempo estimado: 10 a 15 minutos).

Luego de que los estudiantes realicen la exploración del problema, en la fase de socialización de resultados, el docente debe promover la participación de los estudiantes con el propósito de que ellos comuniquen sus soluciones, las discutan en grupo, expongan las diferentes soluciones y presenten sus argumentos que han utilizado para resolver la situación planteada (tiempo estimado: 15 a 20 minutos).

- **Actividad 2 (**Exploración dirigida**):** Esta actividad consta de 2 partes y cada una se realiza con la exploración de un archivo en GeoGebra. Además, se hace una orientación guiada mediante preguntas para que el estudiante vaya encontrando respuestas al problema, plantee conjeturas y justifique matemáticamente los resultados percibidos en las diferentes representaciones que le ofrece el software.

  La primera parte de esta actividad pretende ilustrar la noción de aproximación, esto se hace mediante un archivo de GeoGebra "Act_2_1.ggb" en el cual aparece un deslizador y al manipularlo controladamente, en la pantalla se visualiza que los puntos que están apareciendo (en color verde) están cada vez más próximos del punto rojo, esta actividad permite que el estudiante identifique que es posible aproximarse a un punto a partir de la disminución de la distancia entre ambos puntos, comparando cada una de las magnitudes respecto a la anterior.

  En la segunda parte, se utiliza el archivo "Act_2_2.ggb" donde se espera que lo primero que el estudiante observe sean "tres puntos" sobre la recta numérica, un punto rojo en medio de dos puntos negros. Luego, mediante el zoom (generado al mover controladamente el deslizador "m") se pretende que el estudiante identifique la existencia de otros puntos a izquierda y derecha del punto rojo (sucesión finita de puntos). Respecto a lo anterior se espera que el estudiante pueda comprender y justificar matemáticamente que siempre es posible construir un punto más próximo al punto rojo tanto por izquierda como por derecha.

- **Actividad 3 (**Exploración dirigida**):** En esta actividad se pretende que surja de manera natural la idea de límite, lo que debe ser aprovechado para empezar a discutir este concepto de manera dinámica a través de la aproximación y la tendencia. Se utiliza el archivo "Act_3_1.ggb" con el fin de observar cómo el estudiante decide sobre la existencia de las razones trigonométricas $sen(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\sec(\alpha)$ cuando el ángulo α es igual a $0°, 90°, 180°, 270°$ y $360°$.

  De igual manera, se busca que el estudiante decida sobre la tendencia de las razones trigonométricas $sen(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\sec(\alpha)$ cuando el ángulo α se aproxima a $0°, 90°, 180°, 270°$ y $360°$. Respecto a la tendencia de los valores tomados por las razones trigonométricas, se debe tener en cuenta que no es fácil que el estudiante analizando algunos casos pueda identificar los valores que pueden tomar cada una de las razones. Esto se debe, entre otras cosas, a las limitaciones del software, porque los valores observados son finitos y las razones tienden a $0, 1, -1, -\infty,\ \infty$ según las cifras decimales (los estudiantes se pueden apoyar de la hoja de cálculo registrando por ejemplo 20 datos). Por ello, se debe solicitar a los estudiantes aproximarse más a los ángulos cuadrantales, para evidenciar que entre más aproximaciones se hacen a estos ángulos, los valores siguen aumentando o disminuyendo (cuando tienden a infinito o menos infinito) o tienden a $0, 1$ o -1.

- **Actividad 4 (**Exploración dirigida**):** Esta actividad tiene como objetivo que los estudiantes establezcan aproximaciones a "x" (un punto en el dominio de la función por izquierda como por derecha). Además, se espera que relacionen esas aproximaciones con la tendencia de $f(x)$ a través del registro numérico (a partir de una tabla de valores para $(x_i, f(x_i))$ y la representación gráfica, con el fin de analizar si existe el límite de una función en un punto.

  Se pretende que los estudiantes logren identificar las tendencias de la variable independiente y las de la variable dependiente, mejorando las aproximaciones en el sentido de ir buscando la aproximación que indique la existencia de tendencia a medida que coinciden las aproximaciones laterales.

  Al finalizar el desarrollo de cada una de las actividades propuestas en los incisos 2, 3 y 4 se realiza la fase de explicación de lo esperado en cada una de ellas. La intención de esa fase es promover el debate, la discusión y la reflexión de las ideas expuestas de manera que se llegue al objetivo de cada actividad.

- **Actividad 5 (**Tarea retadora**):** Se realiza el planteamiento de una situación contextualizada donde se espera que el estudiante aplique lo aprendido con el desarrollo de la secuencia. El propósito de esta actividad es identificar si el estudiante comprende cuáles son las variables de la situación, y cómo él interpreta la relación entre la aproximación y tendencia, que se genera al variar "r" de la circunferencia C_2 con la ubicación del punto "R" en el plano cartesiano. El estudiante en esta actividad podría utilizar herramientas de la geométrica analítica para resolver la situación y apoyarse de GeoGebra para observar la situación de forma dinámica.

Referencias

Fiallo, J., y Parada, S. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación*. Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Actividad 1: Exploración libre

Nombre:____Grupo:__________ Fecha: _________

INSTRUCCIONES

Conteste las preguntas y realice lo que se solicita en cada una de las actividades en las hojas de trabajo.

1.1. Considere los siguientes valores $\frac{501}{100}, \frac{5001}{1000}, \frac{50001}{10000}, \frac{500001}{100000}, \ldots$ para la variable a, y $\frac{499}{100}, \frac{4999}{1000}, \frac{49999}{10000} \ldots$ para la variable b.

a) ¿A qué valor se aproximan las variables a y b? **Justifique** su respuesta.
b) ¿Qué relación existe entre la variable a y la variable b? **Justifique** su respuesta.

1.2. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.

Actividad 2: Nociones de Aproximación y Tendencia

Nombre: ____Grupo: _________ Fecha: _______

2.1. Abra el archivo **Act-2.1.ggb** y use el deslizador "a" para explorar la construcción.

a) ¿Describa el comportamiento de los puntos verdes A_n respecto al punto rojo A?

b) ¿Qué sucede con la distancia de cada punto verde A_n respecto al punto rojo A?

c) ¿Qué concluye del comportamiento de los puntos verdes A_n respecto al punto rojo A? **Justifique** su respuesta.

2.2. Abra el archivo **Act-2.2.ggb** y responda la primera pregunta antes de utilizar el deslizador.

a) ¿Qué observa sobre la recta numérica?

b) Deslice el punto "m" solo con la tecla ← y describa lo que observa.

c) ¿Cambió su opinión con lo observado inicialmente? **Justifique** su respuesta.

d) ¿Se puede construir un punto más próximo del punto rojo? ¿Existe otro? ¿Es único? ¿Cuántos puntos se pueden construir más próximos al punto rojo? ¿Por qué? **Justifique** su respuesta.

e) ¿Qué sucede si se construyen más puntos próximos al punto rojo? **Justifique** su respuesta.

2.3. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.

Actividad 3: Aproximación y Tendencia en el plano

Nombre:____Grupo:_________ Fecha: ________

3.1. Abra el archivo **Act-3.1.ggb**, y mueva el punto P en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia.

a) ¿Qué ocurre con cada una de las razones trigonométricas $sen(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\sec(\alpha)$ cuando el ángulo α es igual a $0°, 90°, 180°, 270°$ y $360°$? **Explique** lo que ocurre **justificando** con argumentos matemáticos.

b) ¿Qué ocurre con cada una de las razones trigonométricas $sen(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\sec(\alpha)$ cuando el ángulo α se aproxima a $0°, 90°, 180°, 270°$ y $360°$? **Explique** lo que ocurre **justificando** con argumentos matemáticos.

3.2. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.

Actividad 4: Límite de una función en un punto

Nombre:____Grupo:________ Fecha: ________

4.1. Dada la función $f(x) = x^2 - 1$

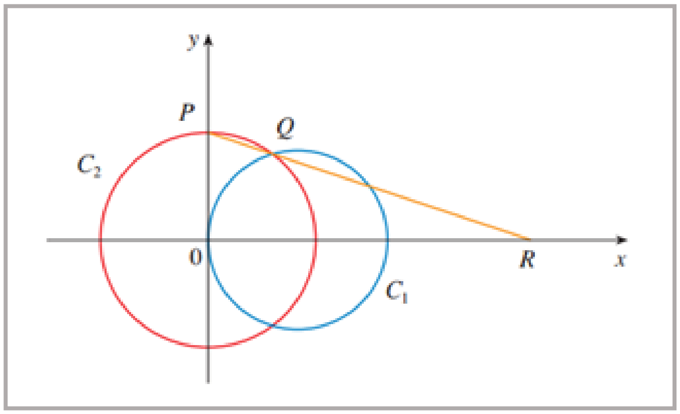
a) Abra GeoGebra y en la hoja de cálculo realice una tabla con los valores de x y $f(x)$ cuando la variable x toma valores en el dominio próximos a $x = 3$ por la izquierda y dibuje en rojo los puntos $(x, f(x))$ en el plano cartesiano.
b) ¿Qué valores utilizó cuando hizo la aproximación a $x = 3$ por izquierda? ¿Qué sucede con la distancia de cada uno de los valores que utilizó respecto a $x = 3$?
c) ¿Hacia qué valor tiende $f(x)$, cuando la variable "x" se aproxima a 3 por la izquierda? **Justifique** su respuesta
d) En la misma hoja de cálculo realice una tabla con los valores de x y $f(x)$ cuando la variable x toma valores en el dominio próximos a $x = 3$ por la derecha y dibuje en azul los puntos $(x, f(x))$ en el plano cartesiano.
e) ¿Qué valores utilizó cuando hizo la aproximación a $x = 3$ por derecha? ¿Qué sucede con la distancia de cada uno de los valores que utilizó respecto a $x = 3$?
f) ¿Hacia qué valor tiende $f(x)$, cuando la variable "x" se aproxima a 3 por la derecha? **Justifique** su respuesta.
g) Cuando nos aproximamos a $x = 3$. ¿A qué valor tiende $f(x) = x^2 - 1$? **Justifique** su respuesta.

4.2. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.

Actividad 5: Tarea Retadora

Nombre:____________________________________Grupo:__________ Fecha: _________

5.1. En la Figura se muestra una circunferencia C_1 con ecuación $(x-1)^2+y^2=1$ y una circunferencia C_2 que se contrae, con radio r y centro en el origen. P es el punto $(0,r)$, Q es el punto superior de intersección de los dos círculos y R es el punto de intersección de la recta PQ y el eje x. ¿Qué le sucede a R al contraerse C_2; es decir cuándo r se aproxima a 0 ?



Capítulo 14: Le Jardin des Citrouilles

Une activité visant un travail sur la généralisation algébrique avant tout apprentissage formel de l'algèbre

Fernando Hitt, Mireille Saboya.[1]

Problématique et objectif d'apprentissage

Le but de cette activité est de promouvoir la généralisation vers l'algèbre. L'activité vise à ouvrir une porte vers l'algèbre dans la transition du primaire au secondaire. De façon concrète, elle cherche à promouvoir des processus de symbolisation (voir l'explication plus détaillée plus bas).

Concepts mathématiques impliqués

Généraux : Généralisation, passage de l'arithmétique vers l'algèbre, expressions numériques, expressions algébriques, représentations spontanées, représentations institutionnelles.

Spécifiques : L'activité s'appuie sur un contexte de la vie réelle et sur l'étude de motifs figuraux qui ne sont pas ordonnés. Elle vise à ce que les élèves fassent émerger différentes représentations qui amèneront vers la symbolisation. L'évolution des représentations des élèves constituera ainsi un solide support pour la construction de connaissances algébriques. L'activité suit une approche d'enseignement nommée ACODESA (**A**pprentissage **CO**llaboratif, **DÉ**bat **S**cientifique et **Au**toréflexion, Hitt 2007; Hitt et Gonzalez-Martin 2015; Hitt, Quiroz 2017, 2019a, 2019b ; Hitt, Saboya et Cortes 2017).

Niveaux d'études

Élèves de 10 à 14 ans.

Nombre d'étapes de l'activité et durée approximative

L'activité est constituée de cinq étapes. Il faut prévoir deux périodes de 1h15 chacune pour les trois premières étapes (travail individuel, travail en équipe et retour en grand groupe). L'étape d'autoréflexion (4^{e} étape) est suggérée comme devoir à la maison. Finalement, une autre période de 1h15 sera allouée pour le retour sur l'autoréflexion et pour la cinquième étape qui est l'étape d'institutionnalisation.

Matériels nécessaires

- Un document retraçant l'activité pour chaque élève,
- Des fichiers GeoGebra dans les iPads des élèves avec l'applet (déjà installé) : Jardin des citrouilles, qui seront utilisés par les élèves selon la méthode d'enseignement ACODESA,
- Un projecteur (pour les discussions en grand groupe),

[1] Université du Québec à Montréal, Canada.

- Des feuilles de papier, des stylos de différentes couleurs. Des couleurs différentes seront utilisées pour les étapes du travail individuel, du travail en équipe et du retour en grand groupe.

Approche d'enseignement et recommandations

Nous vous proposons une activité qui vise l'expression chez les élèves d'une généralisation algébrique. Cette activité se veut une porte d'entrée à l'algèbre sans heurts, c'est-à-dire un passage naturel entre l'étude des nombres et l'abstraction donc entre l'arithmétique et l'algèbre. À travers l'activité présentée ici, un travail autour de la symbolisation est pensé, les élèves vont être amenés :

- à voir la pertinence d'utiliser une symbolisation,
- à choisir eux-mêmes ce symbolisme,
- à prendre conscience qu'il y a une multitude de symbolisations possibles.

Cette activité s'appuie sur l'étude de motifs figuraux qui ne sont pas ordonnés. En procédant ainsi, nous poussons les élèves à trouver différentes formules qui illustrent diverses façons de voir les motifs, ces formules étant équivalentes. L'activité suit une approche d'enseignement nommée ACODESA (**A**pprentissage **CO**llaboratif, **DÉ**bat **S**cientifique et **Au**toréflexion, Hitt 2007; Hitt et Gonzalez-Martin 2015; Hitt, Quiroz 2017, 2019a, 2019b ; Hitt, Saboya et Cortes 2017) qui suit la démarche suivante :

- <u>Étape 1</u> : Travail individuel. Dans cette première étape, l'élève va représenter l'activité en ayant recours à ses propres moyens, ce qu'il va produire est nommé des *représentations fonctionnelles spontanées*. Ces représentations ne sont souvent pas les mêmes d'un élève à l'autre, elles sont propres à chaque élève ;
- <u>Étape 2</u> : Travail en équipe sur la même partie que précédemment. En équipe, les élèves vont discuter et valider ce qu'ils ont produit de façon individuelle ;
- <u>Étape 3</u> : Débat en grand groupe. L'enseignant discute avec les élèves et fait ressortir les différentes représentations qui ont émergées du groupe classe. Elles sont validées en groupe ;
- <u>Étape 4</u> : Retour individuel sur l'activité. La même activité avec un réaménagement des questions est donnée aux élèves, ceux-ci réinvestissent ce qu'ils ont appris, c'est une étape d'autoréflexion ;
- <u>Étape 5</u> : Institutionnalisation. Dans cette dernière étape, l'enseignant repart de ce qui est ressorti aux étapes 3 et 4 dans lesquelles diverses représentations ont été présentées. L'enseignant amène alors les élèves vers les représentations utilisées en algèbre, qui sont des *représentations institutionnelles*.

Même si Radford (2011) montre comment des élèves de 6-7 ans arrivent à généraliser dans une activité portant sur des motifs figuraux, nous vous conseillons de faire cette activité avec des élèves de 10 à 14 ans, âges qui correspondent à la fin du primaire et au début du secondaire. Cette activité qui vise une continuité entre l'arithmétique et l'algèbre s'inscrit dans une séquence de sept activités (voir Figure 13 du chapitre théorico-pratique de Hitt et Saboya).

Dans ce qui suit nous présentons l'activité et donnons quelques exemples de réponses produites par des élèves de 10-11 ans qui proviennent d'une expérimentation qui a pris place au Mexique (Quiroz et Hitt accepté). Comme cette activité requiert l'utilisation de la technologie, des iPads doivent être distribués aux élèves, ils pourront ainsi vérifier ce qu'ils ont produit.

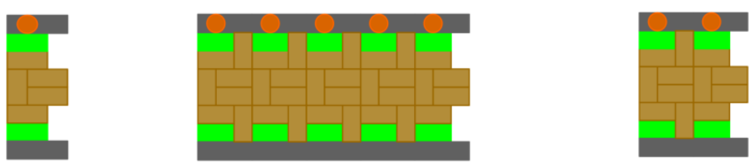
Étape 1 : Un travail individuel

Dans l'activité du jardin des citrouilles, on place l'élève dans une situation dans laquelle il doit aider le directeur de la Ville de Montréal. On vise ainsi un engagement de sa part. Voici l'énoncé de l'activité avec les premières questions posées aux élèves :

La Ville de Montréal se prépare pour son spectacle « Jardins de lumière » au Jardin botanique. Le directeur, responsable du Jardin botanique, a pensé à un « Chemin de citrouilles » tel que présenté sur l'image ci-dessous.

Celui-ci est balisé par un chemin sur lequel sont placées des citrouilles et des dalles vertes lumineuses qui montrent le chemin pendant la nuit. Des dalles marrons complètent le chemin. Le directeur souhaite savoir le nombre de dalles lumineuses et de dalles marrons nécessaires pour construire un chemin quelle que soit la longueur de ce chemin.

Voici des exemples de chemins possibles. Ils sont toujours construits de la même façon.



Peux-tu l'aider à trouver une façon de faire? Pour cela, réponds aux questions qui suivent.

A) Les dalles lumineuses

1) Quel est le nombre de dalles lumineuses sur un chemin composé de 3 citrouilles ?
2) Si on cherche le nombre de dalles lumineuses pour un chemin qui compte 6 citrouilles, as-tu besoin de dessiner ce chemin pour trouver ce nombre? Explique comment tu procèdes.
3) Peux-tu trouver une stratégie pour calculer le nombre de dalles lumineuses pour un chemin composé de 17 citrouilles sans avoir à les compter une à une?

B) Les dalles marrons

4) Quel est le nombre de dalles marrons pour un chemin composé de 3 citrouilles ?
5) Si on cherche le nombre de dalles marrons pour un chemin qui compte 6 citrouilles, as-tu besoin de dessiner ce chemin pour trouver ce nombre ? Explique comment tu procèdes.

6) Peux-tu trouver une stratégie pour calculer le nombre de dalles marrons pour un chemin composé de 17 citrouilles sans avoir les compter une à une ?

Dans cette première étape, on fait réfléchir les élèves à la fois sur le nombre de dalles lumineuses et sur le nombre de dalles marrons nécessaires à la construction d'un chemin. Pour cela, l'élève peut choisir comme générateur de compter le nombre de citrouilles. On peut remarquer que les dalles lumineuses sont plus faciles à compter que les dalles marrons. Les questions poussent les élèves à laisser de côté le comptage des dalles une à une et de discerner une stratégie qui repose sur le repérage d'une régularité. En effet, les nombres choisis, de plus en plus grands, amènent les élèves à laisser tomber le dessin et voir ce qui revient d'un motif à l'autre. Il est demandé aux élèves dans cette première étape d'expliciter leurs stratégies par des mots.

Dans l'expérimentation menée au Mexique[2], certains élèves ont utilisé une stratégie additive pour trouver le nombre de dalles marrons pour un chemin qui compte 5 citrouilles. Dans la production ci-dessous, l'élève trouve le nombre de dalles marrons pour un chemin avec une citrouille et le nombre de dalles marrons pour un chemin de deux citrouilles (qui prévoit les deux dalles marrons vis-à-vis de chacune des citrouilles). Il va alors ajouter deux fois le nombre de dalles marrons pour deux citrouilles au nombre de dalles marrons pour le chemin composé d'une citrouille et ajouter les dalles marrons vis-à-vis des citrouilles qui manquent au comptage total :

> 1 citrouille = 5 marrons, 2 vertes
>
> 2 citrouilles = 12 marrons, 4 vertes
>
> À la cinquième citrouille, 33 dalles marrons. J'ai ajouté la quantité de citrouilles et j'ai ajouté les rectangles de séparation des dalles vertes.

Étape 2 : Un travail en équipe qui mène vers une mise en commun

Les élèves vont être amenés dans cette deuxième étape à discuter des stratégies qu'ils ont élaborées de façon individuelle. Ils seront placés en équipes de 2 ou 3 élèves. Un iPad est distribué par équipe. Cet outil technologique offre aux élèves de manipuler une barre de défilement avec laquelle se construit le motif avec la longueur demandée. L'application fournit également les nombres de dalles lumineuses et marrons qui découlent du chemin choisi par l'équipe. Les élèves pourront ainsi vérifier les stratégies qu'ils ont élaborées.

7) En équipe, discutez des stratégies que vous avez trouvées précédemment pour calculer le nombre de dalles lumineuses et de dalles marrons nécessaires. Procédez-vous tous de la même façon ? Trouvez au moins 2 stratégies pour calculer à la fois le nombre de dalles lumineuses et le nombre de dalles marrons pour un chemin de 17 citrouilles.
8) Une fois que vous avez écrit les différentes stratégies et que vous avez décidé qu'elles sont correctes, utilisez chacune de ces stratégies pour calculer le nombre de dalles lumineuses et

[2] Dans l'expérimentation au Mexique le motif avec 4 citrouilles leur avait été remis au lieu de celui avec 5 citrouilles comme présenté ici.

de dalles marrons nécessaires pour un chemin composé de 21 citrouilles et pour un chemin composé de 54 citrouilles.

9) L'application GeoGebra vous donne le nombre de dalles lumineuses et de dalles marrons pour n'importe quel chemin. Vous pouvez l'utiliser pour vérifier votre travail réalisé précédemment.

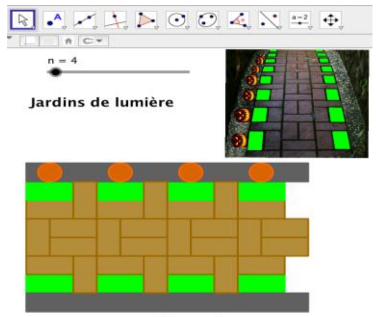


Figure 4

10) Écrivez des messages en mots au directeur qui vont lui permettre de calculer le nombre de dalles lumineuses et de dalles marrons nécessaires pour n'importe quelle longueur de chemin et ce, sans avoir à les compter une à une.

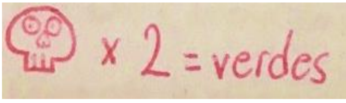
11) Les messages sont longs à lire. Le directeur est pressé, il souhaite que vous raccourcissiez les messages en indiquant les opérations à faire pour que ça rentre dans un message texte. Écrivez ces messages simplifiés.

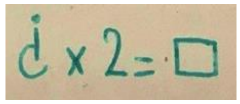
Les questions 10) et 11) sont essentielles pour aller vers la généralisation et la symbolisation. En effet, à la question 10) les élèves auront produit différents messages en mots qui reposent sur le travail mené précédemment. Voici un exemple de message en mots qui provient de l'expérimentation menée au Mexique :

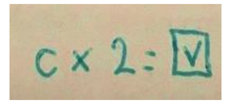
> Tu regardes le numéro de la citrouille. Tu multiplies x2 le numéro de la citrouille [pour les dalles vertes]. Tu multiplies les citrouilles x5 plus les vertes et tu soustrais 2 [pour les dalles marrons].

La question 11) amène à symboliser pour rendre le message plus court, c'est à ce moment que l'élève va percevoir la pertinence d'utiliser une symbolisation et fera un choix pour cette symbolisation. On s'attend ici à diverses symbolisations. Dans l'expérimentation menée au Mexique, les élèves ont utilisé différentes symbolisations pour désigner le nombre de citrouilles : une tête de mort[3], un point d'interrogation à l'envers et la lettre c. Pour désigner les dalles vertes, les élèves ont écrit « vertes », ont utilisé un carré et d'autres un carré avec un v écrit à l'intérieur :

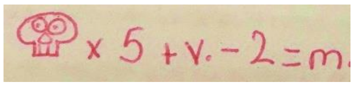
[3] Dans la version pour le Mexique, nous avons changé les citrouilles (version au Québec avec l'Halloween) par des têtes de mort faisant référence à la fête des morts qui a lieu au Mexique.

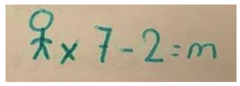


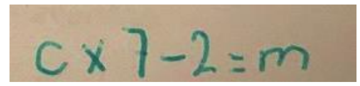




Pour trouver le nombre de dalles marrons, l’analyse des productions des élèves qui ont vécu l’activité relève deux stratégies différentes qui mobilisent dans ce cas-ci également des symbolisations différentes :







Dans ces deux premières étapes, l’enseignant circule en classe et repère ce que font les élèves afin de préparer le retour en grand groupe qui prend place à la troisième étape.

3) Étape 3 : Discussion en grand groupe animée par l’enseignant

À cette étape, une discussion prend place entre le groupe classe et l’enseignant sur ce qui a été produit dans les deux étapes précédentes. Le groupe classe est à la recherche de consensus basés sur l'argumentation et la validation des différentes stratégies ressorties. Il sera demandé aux élèves d’essayer de comprendre les stratégies de leurs compagnons. Il est suggéré que l’enseignant écrive au tableau les différentes stratégies ressorties ou demande à un représentant de chacune des équipes d’aller écrire ce qu’ils ont trouvé au tableau. Il est important de mettre l’accent sur les mêmes formules/messages mais qui utilisent une symbolisation différente. Ceci permettra de rendre apparent que différentes symbolisations sont possibles. Nous suggérons également à l’enseignant de commencer si possible par les messages qui sont erronés pour que les élèves les valident en grand groupe et ne pas commencer par les messages valides qui peuvent alors servir d’argument de validation, ce qui n’est pas souhaitable. En effet, on va préférer entendre un élève dire que telle formule est erronée en se basant sur des arguments liés à la construction des motifs que sur une non concordance avec une formule jugée valide précédemment. Le visuel va prendre une place importante lors de la validation.

4) Étape 4 : Travail individuel, autoréflexion

Une feuille qui reprend l’activité avec quelles-unes des questions est distribuée à chaque élève pour qu’il la remplisse en dehors du cours. Il s’agit de reconstruire les messages qui répondent à l’activité. L’enseignant peut ainsi voir le chemin parcouru par chacun des élèves lors des étapes précédentes et relever de possibles incompréhensions et/ou difficultés. Nous recommandons à l’enseignant de porter une attention particulière à la question : *Si le directeur veut calculer le total de dalles (vertes et marrons) pour chaque chemin, peux-tu calculer sans compter le nombre total de dalles et ce, pour n’importe quelle longueur de chemin ?* qui requiert l’expression d’une généralisation qui nécessite une symbolisation.

5) Étape 5 : Processus d'institutionnalisation mené par l'enseignant

Dans cette cinquième et dernière étape, l'enseignant effectue une analyse des productions des élèves produites aux étapes 3 et 4 sous l'angle de l'évolution des représentations spontanées ainsi que des possibles processus algébriques. Il présente alors aux élèves le processus algébrique comme processus de généralisation basé sur des processus numériques élaborés par les élèves qui ont construit une expression algébrique permettant le calcul demandé.

Voici le document qui peut être présenté aux élèves :

Références

Cortés C., Hitt F. et Saboya M. (2016). Pensamiento aritmético-algebraico a través de un espacio de trabajo matemático en un ambiente de papel, lápiz y tecnología en la escuela secundaria. *Bolema Río Claro (SP)*, 30(54), 240-264.

Hitt F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Paris : Hermès.

Hitt, F. et González-Martín, A.S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (Collaborative learning, Scientific debate and Self-reflexion) method. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 201-219.

Hitt, F. et Quiroz, S. (2017). Aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en un medio sociocultural ligado a la teoría de la actividad. *Revista Colombiana de Educación*. 73, 153-177.

Hitt, F. et Quiroz, S. (2019a). La enseñanza de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico. En S. Quiroz, E. Nuñez, M. Saboya y J. L. Soto (Eds.), *Investigaciones teórico prácticas sobre la modelación matemática en un medio tecnológico* (pp. 1-25). México : AMIUTEM.

Hitt, F. et Quiroz, S. (2019b). Formation et évolution des représentations fonctionnelles-spontanées à travers un apprentissage socioculturel. *Annales de didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 24, 75-106.

Hitt, F., Saboya, M. et Cortés C. (2017). Rupture or continuity: the arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(1), 97-116.

Quiroz, S. et Hitt F. (accepté). Intervenciones docentes en el trabajo con ACODESA en el aula de matemáticas. Dans S-E. Ibarra, A-G del Castillo, S. Quiroz & J-D Saldívar (Eds.), *Modelación, visualización y representaciones en la era numérica* (pp. en processus).

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non – symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (eds.), *Early Algebrization, Advances in Mathematics Education* (pp. 303-322). Dordrecht: Kluwer.

Le jardin des citrouilles

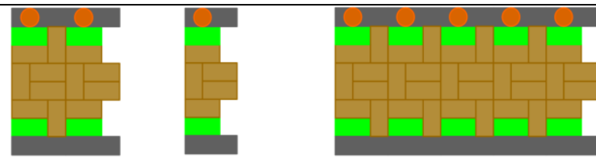
Page 1

Nom de l'élève : ______________________ Noms des membres de l'équipe : ______________________ ______________________ ______________________ Groupe : ______________ Date : ________________	Directives : ▪ Pour ce premier travail individuel, utilise un stylo à encre noire ou bleue. ▪ Pour le travail d'équipe, si tu modifies ta réponse, utilise un stylo à encre rouge. ▪ Après le bilan avec la classe, si tu modifies ta réponse à nouveau, utilise un stylo à encre verte. **Jardin botanique** 

Page 2 (Travail individuel)

La Ville de Montréal se prépare pour son spectacle « Jardins de lumière » au Jardin botanique. Le directeur, responsable du Jardin botanique, a pensé à un « Chemin de citrouilles » tel que présenté sur l'image ci-dessous.

Celui-ci est balisé par un chemin sur lequel sont placées des citrouilles et des dalles vertes lumineuses qui montrent le chemin pendant la nuit. Des dalles marrons complètent le chemin. Le directeur souhaite savoir le nombre de dalles lumineuses et de dalles marrons nécessaires pour construire un chemin quelle que soit la longueur de ce chemin. Voici des exemples de chemins possibles. Ils sont toujours construits de la même façon.



Peux-tu l'aider à trouver une façon de faire? Pour cela, réponds aux questions qui suivent.

A) Les dalles lumineuses

1) Quel est le nombre de dalles lumineuses sur un chemin composé de 3 citrouilles ?
2) Si on cherche le nombre de dalles lumineuses pour un chemin qui compte 4 citrouilles, as-tu besoin de dessiner ce chemin pour trouver ce nombre ? Explique comment tu procèdes.
3) Peux-tu trouver une stratégie pour calculer le nombre de dalles lumineuses pour un chemin composé de 17 citrouilles sans avoir à les compter une à une ?

B) Les dalles marrons

4) Quel est le nombre de dalles marrons pour un chemin composé de 3 citrouilles ?
5) Si on cherche le nombre de dalles marrons pour un chemin qui compte 4 citrouilles, as-tu besoin de dessiner ce chemin pour trouver ce nombre ? Explique comment tu procèdes.
6) Peux-tu trouver une stratégie pour calculer le nombre de dalles marrons pour un chemin composé de 17 citrouilles sans avoir les compter une à une?

Page 3 (Travail en équipe)

7) En équipe, discutez des stratégies que vous avez trouvées précédemment pour calculer le nombre de dalles lumineuses et de dalles marrons nécessaires. Procédez-vous tous de la même façon ? Trouvez au moins 2 stratégies pour calculer à la fois le nombre de dalles lumineuses et le nombre de dalles marrons pour un chemin de 17 citrouilles.
8) Une fois que vous avez écrit les différentes stratégies et que vous avez décidé qu'elles sont correctes, utilisez chacune de ces stratégies pour calculer le nombre de dalles lumineuses et de dalles marrons nécessaires pour un chemin composé de 21 citrouilles et pour un chemin composé de 54 citrouilles.
9) L'application GeoGebra vous donne le nombre de dalles lumineuses et de dalles marrons pour n'importe quel chemin. Vous pouvez l'utiliser pour vérifier votre travail réalisé précédemment.

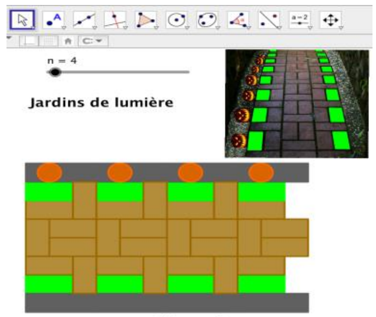


Figure 4

10) Écrivez des messages en mots au directeur qui vont lui permettre de calculer le nombre de dalles lumineuses et de dalles marrons nécessaires pour n'importe quelle longueur de chemin et ce, sans avoir à les compter une à une.

11) Les messages sont longs à lire. Le directeur est pressé, il souhaite que vous raccourcissiez les messages en indiquant les opérations à faire pour que ça rentre dans un message texte. Écrivez ces messages simplifiés.

Page 4 (Discussion en grand groupe)

Vous allez discuter en grand groupe de ce qui a été fait précédemment. Essayez de comprendre les stratégies de vos compagnons, sont-elles valides ? Si oui, pourquoi, si non pourquoi ?

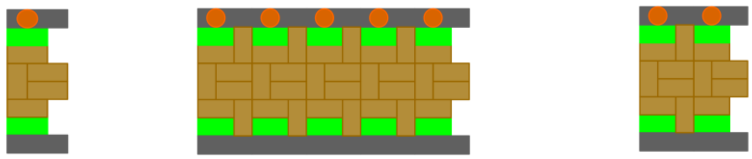
Page 5 (Travail individuel, autoréflexion)

LE JARDIN DES CITROUILLES

La Ville de Montréal se prépare pour son spectacle « Jardins de lumière » au Jardin botanique. Le directeur, responsable du Jardin botanique, a pensé à un « Chemin de citrouilles » tel que présenté sur l'image ci-dessous.

Celui-ci est balisé par un chemin sur lequel sont placées des citrouilles et des dalles vertes lumineuses qui montrent le chemin pendant la nuit. Des dalles marrons complètent le chemin. Le directeur souhaite savoir le nombre de dalles lumineuses et de dalles marrons nécessaires pour construire un chemin quelle que soit la longueur de ce chemin.

Voici des exemples de chemins possibles. Ils sont toujours construits de la même façon.



Peux-tu l'aider à trouver une façon de faire? Pour cela, réponds aux questions qui suivent.

1) Si le directeur veut calculer le total de dalles (vertes et marrons) pour chaque chemin, peux-tu calculer sans compter le nombre total de dalles et ce, pour n'importe quelle longueur de chemin ? Trouve au moins deux façons de faire.

2) Quel est le nombre de dalles vertes pour un chemin composé de 67 citrouilles ?

3) Quel est le nombre de dalles marrons pour un chemin composé de 67 citrouilles ?

Page 6 (Processus d'institutionnalisation mené par l'enseignant)

Un retour sur l'activité est fait par votre enseignant. Prenez des notes sur ce qui est écrit au tableau.

Capítulo 15: Rectángulos y círculos

Actividad didáctica

Samantha Quiroz Rivera[1], Fernando Hitt[2].

Problemática y propósitos de aprendizaje

Que los estudiantes inicien procesos de generalización donde se promueva la artículación entre la aritmética y el álgebra considerando la noción de variable y con ello apoyar la transición de la escuela primaria a secundaria.

Conceptos matemáticos involucrados

Generales: Generalización en contextos de secuencias visuales y numéricas para la articulación entre la aritmética y el álgebra incluyendo la noción de variable.

Específicos: La resolución de problemas de generalización involucrando el análisis de patrones, es un elemento esencial en los procesos de articulación entre la aritmética y el álgebra. La predicción, la conjetura y la validación, en ambientes de trabajo en colaboración son esenciales en el aprendizaje de las matemáticas en un acercamiento sociocultural del aprendizaje.

Nivel de estudios

Quinto o sexto grado de primaria y primer año de secundaria (alumnos de 10 a 13 años).

Total de actividades y duración aproximada

Se ha presentado una sola actividad entre 6 de ellas (ver otro ejemplo en el capítulo de Hitt y Saboya en este mismo libro). Para esta actividad, puede realizarse en dos sesiones de 2 horas (para las primeras 3 etapas de ACODESA). La etapa de autorreflexión se realiza en casa o en otra sesión. La institucionalización se realiza al final en una presentación de 20 minutos.

Materiales necesarios

- Hojas de trabajo para cada estudiante, organizadas de acuerdo al método de enseñanza ACODESA.
- Una tableta para cada equipo, que incluya la actividad (applet GeoGebra).
- Proyector (para utilizar en discusiones grupales),
- Hojas de papel, bolígrafos de color azul, rojo y verde, para identificar cada una de las etapas de trabajo según el método de enseñanza ACODESA.

Método o recomendaciones de enseñanza

[1] Universidad Autónoma de Coahuila, México
[2] Université du Québec à Montréal, Canada.

Las hojas de trabajo de la actividad se han elaborado siguiendo el método de enseñanza ACODESA (ver capítulo de Quiroz y Hitt 2019) : a) Trabajo individual, b) Trabajo en equipo, c) Trabajo en gran grupo, d) Autorreflexión, y e) Proceso de institucionalización.

Recordemos brevemente que el método ACODESA (ver Hitt y Quiroz, 2019) tiene un soporte teórico de una teoría sociocultural basada en una perspectiva vigotskiana (Vygotsky, 1932) junto con un acercamiento de la teoría de la actividad de Leontiev (1978). Es aconsejable constituir equipos de 2 o 3 personas y no más (ver por ejemplo las sugerencias de Prusak, Hershkowits & Schwarz, 2013).

Se intenta propiciar en el aula un acercamiento sociocultural del aprendizaje de las matemáticas sobre el tema de la generalización (ver Saboya, M., Hitt, F., Quiroz S. et Antoun Z. en prensa).

Es importante que el profesor o la profesora sea un guía en las primeras tres etapas del método ACODESA, dejando a los alumnos predecir, conjeturar y validar por ellos mismos sus resultados. El profesor intenta en esas etapas de crear un ambiente de reflexión en el aula. No debe proporcionar respuestas, sino promover la reflexión con más preguntas que orienten al alumno o al equipo.

Una vez que los alumnos han terminado la cuarta etapa (proceso de autorreflexión, que consiste en una reconstrucción individual de lo realizado en las primeras tres etapas), el profesor haciendo mención de las representaciones que emergieron en las primeras etapas, introduce las representaciones institucionales.

A continuación, presentamos la actividad que se propone para utilizar directamente en el aula.

Referencias

Hitt, F., & Quiroz, S. (2019). Enseñanza de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico. En S. Quiroz, E. Nuñez, M. Saboya y J-L. Soto (Eds.), *Investigaciones teórico-prácticas sobre la modelación matemática en un medio tecnológico*. AMIUTEM, México.

Hitt F., et Saboya M. (sous presse). Un dispositif cyclique pour la formation de futurs enseignants de mathématiques au secondaire à travers des situations d’investigation : une illustration de ce qui se fait au Québec. En S.E. Ibarra Olmos, A. G. Del Castillo Bojórquez, S. Quiroz y J. D. Zaldívar Rojas (Eds.), *Modelación, visualización y representaciones en la era numérica*. AMIUTEM.

Hitt F., et Saboya M. (sous presse). Activité: Le jardin des citrouilles. En C. F. Romero Félix, M. T. Dávila Araiza y F. Hitt (Eds.), *Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica*. AMIUTEM.

Saboya, M., Hitt, F., Quiroz S. Et Antoun Z. (sous presse). La pensée arithmético-algébrique comme transition du primaire au secondaire : des situations d’investigation dans lesquelles modélisation et technologie jouent un rôle central. *Actes de l’EMF 2018*, Paris.

Rectángulos y círculos

Página 1

<table>
<tr>
<td>Nombre del alumno:

____

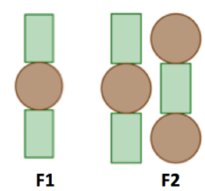
Nombre de los miembros del equipo:

____

____

____

Grupo: _______________

Fecha: ________________</td>
<td><u>Instrucciones</u>:
Para la primera actividad individual, utiliza una pluma azul.
Para el trabajo en equipo, si modificas tú respuesta, utiliza una pluma roja.
En el trabajo en grupo, si modificas tú respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.
Rectángulos y círculos
</td>
</tr>
</table>

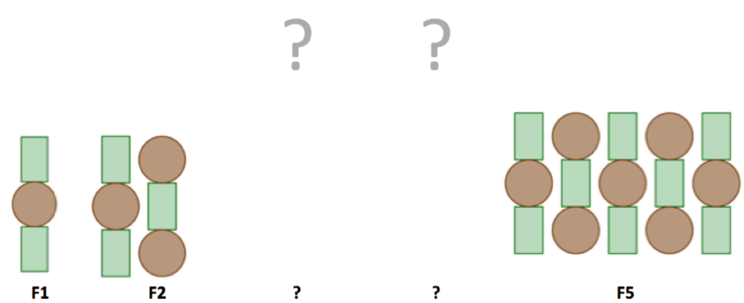
Página 2 – Situación y trabajo individual

Tenemos una serie de rectángulos y círculos arreglados como lo muestra la figura más abajo.

Te invitamos a efectuar un trabajo individual, después en equipo, y en gran grupo.

Finalmente, un regreso a una reflexión individual como será indicada por la profesora.

Enseguida te mostramos las dos primeras figuras y la quinta.

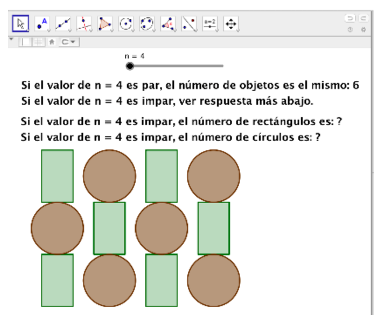


1. Calcula el número de rectángulos y de círculos de la figura 3.
2. ¿Tienes necesidad de realizar un dibujo para calcular el número de rectángulos y de círculos de la 4ª figura?

3. ¿Puedes encontrar una estrategia para calcular el número de rectángulos y círculos de la 5ª figura?

Página 3 – Trabajo en equipo

4. Analizar el trabajo de tus compañeros para encontrar diferentes estrategias que te permitan de calcular el número rectángulos y de círculos de la 6ª figura. Escribe cada una de las estrategias.
5. Una vez que tengan sus estrategias, y que han decidido que son correctas, calcula con cada una de las estrategias el número de calaveritas, el número de los ladrillos luminosos y el número rectángulos y de círculos de la 12ª figura. ¿Cuál es su resultado con cada estrategia que han utilizado? ¿Obtienen el mismo resultado con cada estrategia?
6. Ahora, calcula con tus estrategias el número de rectángulos y de círculos para la 13ª figura.
7. Utiliza la aplicación GeoGebra para verificar si sus estrategias corresponden a los resultados proporcionados por la aplicación GeoGebra. Si los resultados no corresponden, busca una explicación.



8. Una vez que hayas terminado la etapa precedente, proporciona a tus compañeros un procedimiento o una fórmula que les permita de calcular el número de rectángulos y de círculos para cualquier figura de acuerdo a la misma forma como lo han hecho antes.

Página 4 – Discusión en gran grupo

9. Discusión de lo que han hecho los equipos en las primeras etapas. Intenta comprender los procedimientos de tus compañeros basado en la argumentación y la validación.

Página 5 – Trabajo individual, autorreflexión

Un nuevo cuestionario será utilizado por cada alumno para trabajar en casa. Se trata de reconstruir los resultados que permitan de resolver la actividad.

Página 6 – Proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora

El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las representaciones espontáneas de los alumnos y su acercamiento en sus procesos aritméticos o algebraicos. En fin, el profesor o la profesora proporciona a los estudiantes los procesos aritméticos y algebraicos en tanto que procesos de generalización basados en los procesos numéricos de los alumnos y llegando a una expresión algebraica que permita el cálculo directo.